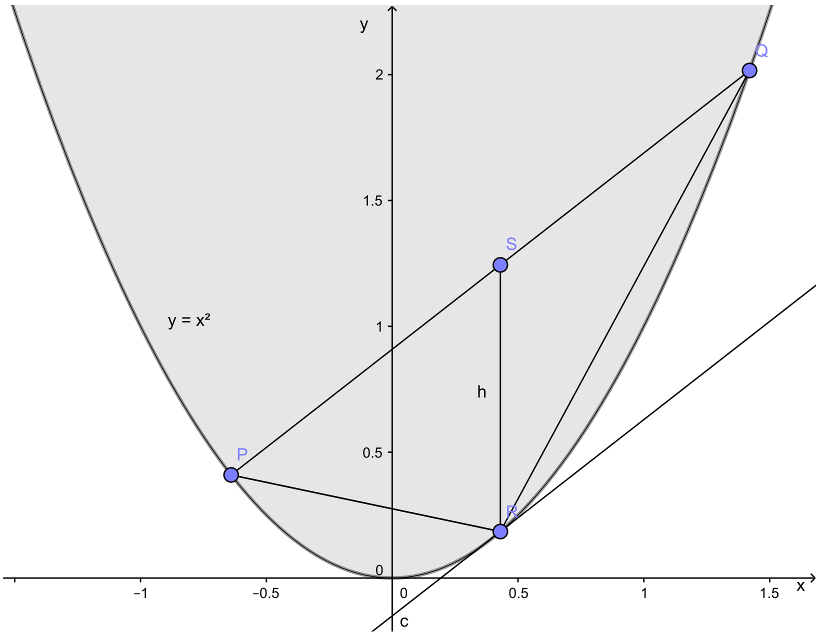
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 9.1 (*18 Punkte*) Auf der Parabel mit der Gleichung $y = cx^2$, $c \in \mathbb{R}$, sind zwei Punkte $P = (a, ca^2)$ und $Q = (b, cb^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, gegeben. Der Scheitelpunkt R zu P und Q ist durch die Bedingung gegeben, dass die Steigung der Parabel im Punkt R gleich der Steigung der Geraden durch P und Q ist. In dieser Aufgabe wollen wir die Fläche $F(\Delta PQR)$ des Dreieckes PQR bestimmen.



a) Zeigen Sie, dass die Gerade durch P und Q durch die Gleichung $y = xc(a+b) - cab$ gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass gilt $R = \left(\frac{a+b}{2}, c\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$.
(*Hinweis:* Die Steigung der Parabel an der Stelle x ist durch $2cx$ gegeben.)

c) Zeigen Sie: $h = \frac{1}{4}c(b-a)^2$ (die Strecke h verläuft parallel zur y-Achse, siehe Bild).

d) Folgern Sie daraus: $F(\Delta PQR) = \frac{1}{8}c(b-a)^3$.

e) Zeigen Sie: Ist R' bzw. R'' der Scheitelpunkt zu P und R bzw. R und Q ist, so gilt

$$F(\Delta PRR') = F(\Delta RQR'') = \frac{1}{8}F(\Delta PQR).$$

Aufgabe 9.2 (*18 Punkte*)
Betrachten Sie die Gleichung

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0. \tag{$*$}$$

a) Sei $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$. Berechnen Sie $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$. Skizzieren Sie den Graphen von f. Wie viele reelle Lösungen hat $(*)$?

Im Folgenden wollen wir die Nullstellen berechnen.

b) Substituieren Sie $y = x + \alpha$ für ein geeignetes α um die Gleichung in die Form

$$y^3 = py + q \tag{$**$}$$

zu bringen.

c) Verwenden Sie die Cardanische Formel um eine Lösung y von $(**)$ zu bestimmen. Ihre Lösung sollte den Wurzelausdruck $\sqrt[3]{1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}}$ enthalten.

d) Zeigen Sie $\left(-1 + \sqrt{-\frac{2}{3}}\right)^3 = 1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}$

e) Nutzen Sie dies, um Ihr Ergebnis aus (c) zu vereinfachen. Welcher Lösung x von $(*)$ entspricht das?

f) Berechnen Sie jetzt die anderen beiden Lösungen von $(*)$.

Aufgabe 9.3 (*12 Punkte*) Finden Sie alle (komplexen) Lösungen der Gleichung

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$