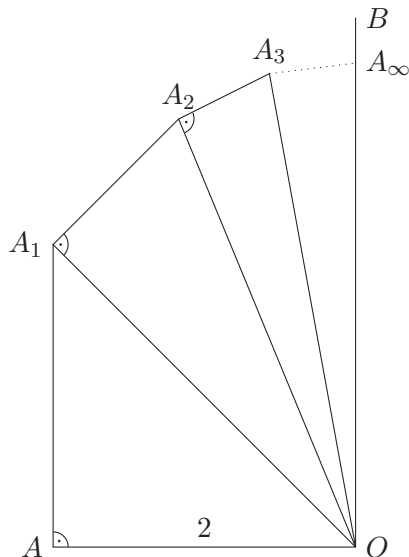
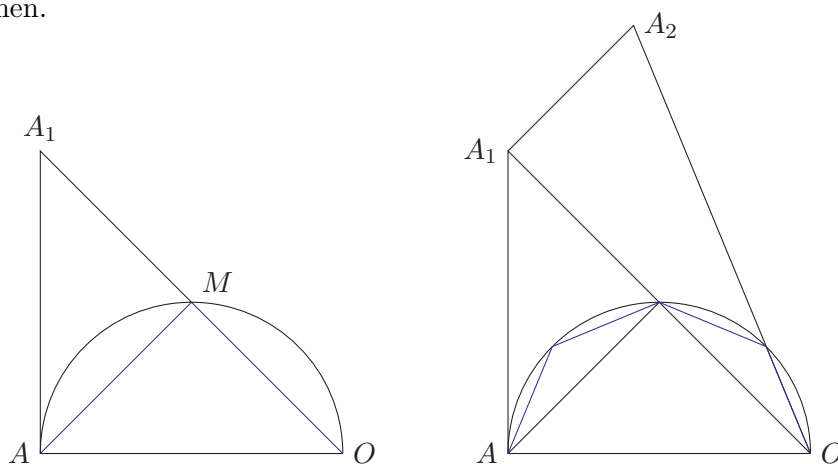


DR. ANTON MALEVICH

**Aufgabe 10.1** Wir betrachten das “Restwinkelhalbierungsverfahren zur Ermittlung des Halbkreisumfangs”, oder, mit anderen Worten, einen Algorithmus zur Konstruktion einer Strecke der Länge  $\pi$ . Dies wird anhand folgender Skizze erläutert.



Dabei gilt:  $|OA| = 2$ ,  $\angle BOA = \angle OAA_1 = \angle OA_i A_{i+1} = \frac{\pi}{2}$  sowie  $\angle AOA_1 = \frac{\pi}{4}$  und  $\angle A_i OA_{i+1} = \frac{\pi}{2^{i+2}}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Beweisen Sie:  $|OA_\infty| = \lim_{i \rightarrow \infty} |OA_i| = \pi$ , indem Sie wie folgt vorgehen.



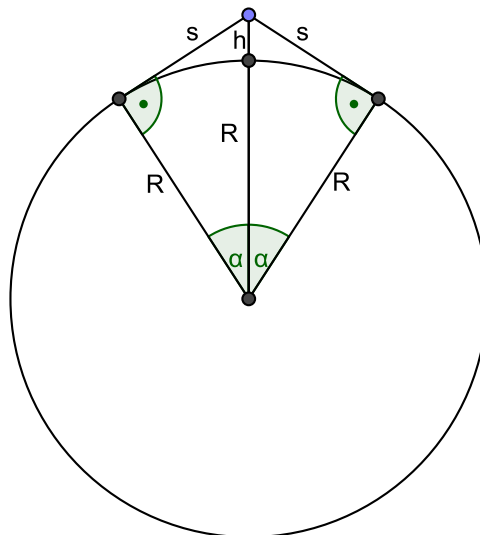
- Zeigen Sie zunächst, dass  $|OA_1| = |OM| + |MA|$  gilt, d.h.  $|OA_1|$  gleich dem Halbumfang des in den Einheitskreis eingeschriebenen Quadrates ist.
- Zeigen Sie nun, dass  $|OA_2|$  gleich dem Halbumfang des in den Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen 8-Ecks ist.
- Zeigen Sie per Induktion, dass  $|OA_i|$  gleich dem Halbumfang des in den Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen  $2^{i+1}$ -Ecks ist.

**Aufgabe 10.2** Benutzen Sie in dieser Aufgabe den Wert  $R = 6371$  km für den Erdradius.

- Wir nehmen an, ein Seil würde um den Äquator gelegt, um  $l_0 = 2$  m verlängert und dann im Kreis um die Erde gespannt. In welcher Höhe über dem Boden verlief das Seil?
- Wie verändert sich die Antwort aus a), wenn man das Seil um eine Kugel mit dem Radius 1 m legt und dann um 2 m verlängert?
- Das verlängerte Seil aus Teil a) wird um den Äquator gelegt und an einem Punkt straff gezogen. Wie groß ist der maximale Abstand von der Erdoberfläche?

Tipp: Sie können dazu wie folgt vorgehen:

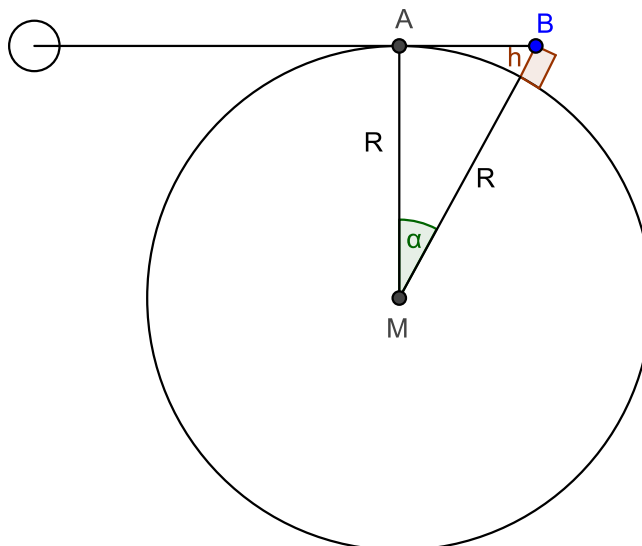
- Berechnen Sie die Strecke  $s$  sowie die Länge des auf der Erde aufliegenden Seiles in Abhängigkeit von  $\alpha$ . Wie lang muss das Seil bei gegebenem Winkel  $\alpha$  sein?
- Verwenden Sie die Näherung für kleine Winkel  $\tan(\alpha) \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$  um  $\alpha$  aus  $l_0$  zu bestimmen.
- Berechnen Sie nun  $h$ . Sie dürfen hierzu die Näherung  $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$  verwenden.



**Aufgabe 10.3** Führen Sie das Archimedes-Verfahren zur Bestimmung des Kreisumfangs durch.

- Gehen Sie von einem ein- und einem umbeschriebenen Sechseck aus und führen Sie zwei (bis zu einem 24-Eck) Verdopplungsschritte aus. (Vereinfachen Sie die Ausdrücke mit den Wurzeln soweit wie möglich und berechnen Sie die ungefähren Werte mit dem Taschenrechner nur ganz am Ende.)
- Führen Sie nun zwei weitere Verdopplungsschritte (bis zu einem 96-Eck) mit dem Taschenrechner aus. Als Startwerte benutzen Sie die am Ende des Teils a) bestimmten Werte. Ist Ihre Annäherung an  $\pi$  besser als die von Archimedes:  $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ ?

**Aufgabe 10.4** Anna sitzt am Strand und erwartet den Sonnenuntergang. Bastian steht am Fenster seines Hotelzimmers im fünften Stock genau 20m über Anna. Dadurch kann er die Sonne etwas länger sehen. Er sieht den Sonnenuntergang 34,5 Sekunden später als Anna. Die beiden versuchen aus dieser Information den Erdradius zu bestimmen.



In der obigen Zeichnung ist  $A$  der Standort von Anna, wenn sie den Sonnenuntergang sieht,  $B$  derjenige von Bastian 34,5 Sekunden später.  $h$  bezeichne die Höhe seines Aussichtspunkts.

Wie groß ist  $\alpha$ ? Berechnen Sie daraus den Erdradius  $R$  und den Erdumfang.

Tipp: Verwenden Sie die Näherung  $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$  für kleine Winkel  $\alpha$ .

**Aufgabe# 10.5** Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$x^3 + 3x^2 - 12x - 18 = 0.$$

*Hinweis:*  $(2 - i)^3 = 2 + 11i$ .

★ Frohe Weihnachten

👉 und einen guten Start ins Neue Jahr!

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.