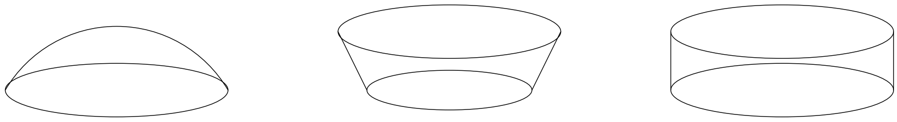
Aufgabe 11.1 Eine Eisdiele verkauft Eiskugeln mit Radius 2 cm in kegelförmigen Waffeln mit Radius 3 cm und Höhe 12 cm. In einer Waffel mit 2 Kugeln schmilzt das Eis und sammelt sich unten in der Waffel. Wir nehmen an, dass das Eis sein Volumen beim Schmelzen nicht verändert. Läuft die Waffel über, oder nicht? Wenn nicht, wie hoch steht das geschmolzene Eis in der Waffel?

Aufgabe 11.2 Kugel + Kegel = Zylinder

a) Leiten Sie durch Vergleich mit einem geeigneten Kegelstumpf die Formel

$$V = \pi\bigl(R - \tfrac{1}{3}h\bigr)h^2$$

für eine Kappe der Höhe h von einer Kugel mit Radius R her.



b) Der Stiel und die Kerne eines kugelförmigen Apfels mit Radius R werden mit einem Apfelstecher entfernt. Wie viel Volumen bleibt übrig, wenn der zylinderförmige Apfelstecher den Radius r hat?

Aufgabe 11.3 In dieser Aufgabe ist $\ln x := \log_e x$.

a) Zeigen Sie: $\log_a b = \log_{a^n}(b^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:
i) $\dfrac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3}$, ii) $\log_2 10 \cdot \log_{10} 2$, iii) $\log_3 \dfrac{5}{4} + \log_9 \dfrac{24}{5} - \log_9 \dfrac{5}{6}$, iv) $\dfrac{\ln\bigl(10^{\ln(e^2)}\bigr)}{\ln 5 + \ln 2}$.

c) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
i) $4^x = 0{,}125$, ii) $3 \ln x = \ln 56 - \ln 7$,
iii) $\log_2(10x) = 1 + \log_2 5$, iv) $\ln x = 2 \ln 5 + 3 \ln 2$.

Aufgabe 11.4 In dieser Aufgabe ist $\ln x := \log_e x$. Wir definieren die Funktionen

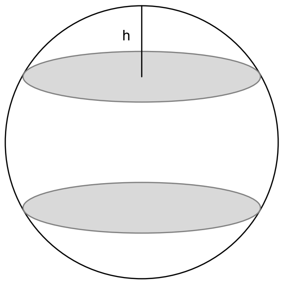
$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:
i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ sowie $\tanh^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} = 1$,
ii) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\ln\bigl(x + \sqrt{x^2 + 1}\bigr)$ bzw. $\frac{1}{2} \ln\bigl(\frac{1+x}{1-x}\bigr)$ invers zur Funktionen $\sinh x$ bzw. $\tanh x$ sind.

Aufgabe# 11.5 Eine Kugel wird in ein von Radius und Höhe genau passendes zylindrisches Gefäß getan und der Zylinder wird mit Wasser aufgefüllt. Wie hoch steht das Wasser im Zylinder wenn die Kugel aus dem Zylinder entfernt wird?

Aufgabe# 11.6 Eine Kugel vom Radius 1 soll in drei Scheiben des gleichen Volumens geschnitten werden. Stellen sie eine kubische Gleichung für die Dicke h der äußeren Scheibe auf. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Taschenrechners oder Computers näherungsweise die Lösungen dieser Gleichung. Welche ist hier relevant?



Aufgabe# 11.7 Die Lunge besteht aus 400 Millionen Lungenbläschen, die jeweils einen Radius von 0,01 cm haben. Berechnen Sie den Gesamtoberflächeninhalt aller Lungenbläschen. Welchen Radius hat eine einzige Kugel mit dem gleichen Oberflächeninhalt? (*Hinweis:* Die Oberfl"ache einer Kugel mit Radius r ist durch $4\pi r^2$ gegeben.)

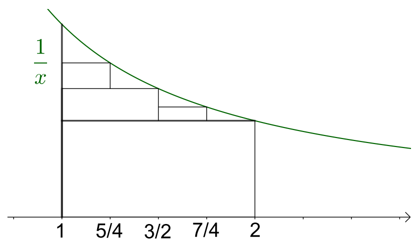
Aufgabe# 11.8 Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

a) i) $2^{(3^5)}$, ii) $2^{1+x} \cdot 3^x$, iii) $\sqrt{9^{x-1}}$, iv) $\sqrt[5]{10^{20x+10}}$, v) $2^x \cdot 4^{1-x} \cdot 8^x$.

b) i) $\log_3 \frac{2}{9} - \log_3 \frac{8}{27}$, ii) $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_2 5$ iii) $\frac{\log_5 8}{\log_5 4}$,

iv) $\log_5 8 \cdot \log_5 4$, v) $\log_{10} 64 - \log_{10} \frac{1}{2}$, vi) $\log_2 5 + \log_2 3$.

Aufgabe# 11.9 Betrachten Sie das folgende Bild.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der 4 Rechtecke aus dem Bild.

b) Wie könnte man das Verfahren fortsetzen um den Flächeninhalt der von dem Graphen der Funktion $y = \frac{1}{x}$ und der x-Achse zwischen 1 und 2 eingeschlossen wird, in (unendlich viele) Rechtecke aufzuteilen?

c) Stellen Sie eine Vermutung auf, was der Flächeninhalt der weiteren Rechtecke sein wird (ohne Beweis), und folgern Sie daraus die folgende Formel:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}. \quad \left(\textit{Hinweis: } \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}. \right)$$

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.