Elementarmathematik – WS 2017/2018 **Blatt 12**

Dr. Anton Malevich

Aufgabe 12.1 Es bezeichne $\ln x$ die Fläche zwischen der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ und der x-Achse im Intervall $[1, x]$ $(x \geq 1)$.

a) Nähern Sie $\ln 10$ durch die Fläche von 3 gleich breiten Trapezen an.

b) Zeigen Sie, dass $\ln 10 \approx \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{1}{125}$. (*Hinweis:* Schreiben Sie $\ln\left(\frac{2^{10}}{10^3}\right)$ auf zwei verschiedene Arten und benutzen Sie die Näherung $\ln(1 + x) \approx x$ für kleine x.)

c) Nähern Sie nun $\ln 2$ durch die Fläche von 3 gleich breiten Trapezen an.

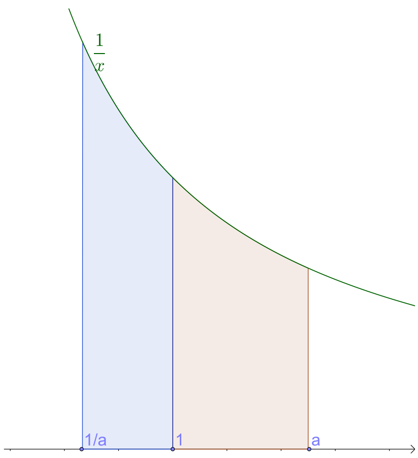
d) Setzen Sie Ihre Näherung von $\ln 2$ aus c) in die Formel aus b) ein.

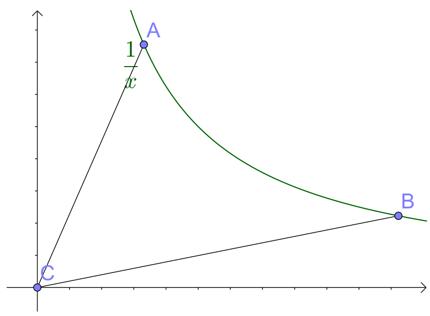
e) Berechnen sie den Wert von $\ln 10$ mit einem Taschenrechner. Welche der beiden Näherungen von $\ln 10$ aus a) und aus d) ist besser?

Aufgabe 12.2

a) Zeigen Sie, dass die Flächen unter dem Graphen der Funktion $y = \frac{1}{x}$ von 1 bis a und von $\frac{1}{a}$ bis 1 übereinstimmen für alle $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

b) Wir wählen zwei Punkte $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$ und $B = \left(b, \frac{1}{b}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a < b$ auf dem Graphen der Funktion $y = \frac{1}{x}$. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche die von den Geraden von $C = (0, 0)$ nach A bzw. nach B und dem Graphen der Funktion eingeschlossen wird. Drücken Sie Ihr Antwort mit ln aus; unterscheiden Sie dabei drei Fälle: $1 < a < b$, $a < 1 < b$ und $a < b < 1$.





Aufgabe 12.3 Berechnen Sie mit Hilfe der aus der Rechenregeln die Ableitungen der folgenden Funktionen. (Dabei können Sie die Ableitungen von $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x und x^r, $r \in \mathbb{R}$, als bekannt annehmen.)

a) $f(x) = (4x^2 - x)(x^2 - 1)$, b) $f(x) = 7 \sin x + \cos x$, c) $f(a) = \tan a$,

d) $g(x) = \ln(\cos x)$, e) $h(\phi) = \sin(\phi) \cos(\phi)$, f) $x(t) = s\sqrt[4]{t}$,

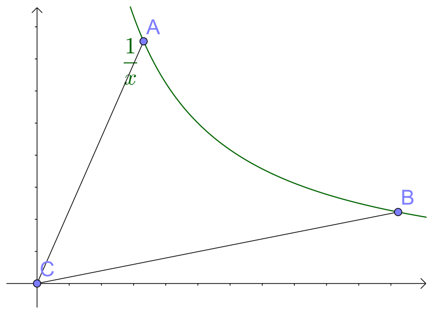
g) $f(x) = x^{\cos x}$, h) $f(x) = e^{x^2}$, i) $f(t) = \frac{6t^4 + 2t^2 - 7t}{2t^3}$.

Aufgabe 12.4 Bestimmen Sie die folgenden Flächen durch integrieren:

a) Fläche zwischen dem Graphen von $y = e^x$, der y-Achse und der Geraden $y = e$.

b) Fläche zwischen den Graphen von $y = \sqrt{x}$ und $y = x^3$.

c) Fläche zwischen den Strecken AC, CB und der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$, wobei $C = (0, 0)$, $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$ und $B = \left(b, \frac{1}{b}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a < b$. (*Hinweis:* Schreiben Sie zuerst die Gleichungen der Geraden durch A und C bzw. durch B und C.)



Aufgabe# 12.5 Finden Sie die Ableitung von

a) $4x^4 - 3x^2 + 2$,

b) $x\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x^7}$,

d) $\frac{5\sqrt{x}}{x^5}$,

e) $\sqrt{x^2 + x}$,

f) $x \cdot \sin x$,

g) $\sqrt{x+1} \cdot \ln x$,

h) $x \cdot \ln(\sin x)$,

i) $x^2 e^{-x}$,

j) $\tan(2x - 4)$,

k) $\arctan \sqrt{x}$,

l) $e^{1+\sqrt{x}}$,

m) $\dfrac{x}{x+1}$,

n) $\dfrac{x}{x^2+1}$,

o) $\dfrac{\ln x}{\sin x}$.

Aufgabe# 12.6 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(a^3 + \frac{a^2}{2} - xa + 2\right) da$,

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$,

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$,

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \; dt$,

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x)^{37} \cos(x)^{42}}{x^6 + 17x^4 - 3x^2 + 3} dx$.

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.