Aufgabe 13.1 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$, b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$,

d) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\cos x\,dx$, e) $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx$, f) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$.

Aufgabe 13.2 Ableitung der Umkehrfunktion.

a) Leiten Sie $(e^x)' = e^x$ aus $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ her.

b) Es gilt $\arcsin(\sin x) = x$. Leiten Sie daraus her:

$$(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

c) Berechnen Sie nun mit Hilfe von Teil b) und partieller Integration:

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx.$$

Aufgabe 13.3 (Siehe Aufgabe 11.4.) Wir definieren die Funktionen

$$\cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \sinh x := \frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

a) Leiten Sie aus $(e^x)' = e^x$ her: $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x}$ sowie $(\tanh x)' = 1-\tanh^2 x$.

b) Es seien $\operatorname{artanh} x := \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ bzw. $\operatorname{arsinh} x := \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ die Umkehrfunktionen zu $\tanh x$ bzw. $\sinh x$. Bestimmen Sie die Ableitungen von $\operatorname{artanh} x$ und $\operatorname{arsinh} x$

  (i) mit der Kettenregel aus der bekannten Ableitung von $\ln x$;

  (ii) als Ableitung der Umkehrfunktion aus den nach Teil a) bekannten Ableitungen von $\tanh x$ und $\sinh x$.

Aufgabe 13.4 Benutzen Sie Aufgabe 13.3 um folgende Integrale zu berechnen:

a) $\displaystyle\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}\,dx$, c) $\displaystyle\int_1^{2\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Vereinfachen Sie die Antwort soweit es geht!
Hinweis zu c): Substitution $u = \frac{1}{x}$.

Aufgabe$^{\#}$ **13.5** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$,

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$, e) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$, f) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$, g) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx$.

Aufgabe$^{\#}$ **13.6** Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden 3 Funktionen:

a) $f(x) = \ln x$, b) $g(x) = x^2 e^x$, c) $h(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$, d) $f(x) = \arcsin x$.

Aufgabe$^{\#}$ **13.7** Bestimmen Sie die Ableitung von $\arccos x$ aus der Ableitung von $\cos x$.

Aufgaben mit $^{\#}$ werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.