Aufgabe# 14.1 Beweisen Sie:

a) $4^n - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar.

b) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 11 teilbar.

c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n} > \frac{3}{7}n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe# 14.2 Ganze Zahlen

a) Berechnen Sie den Rest bei der Division von 37^{36} durch 7.

b) Berechnen Sie die Summe: $\sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} 2^k$.

Aufgabe# 14.3 Es bezeichne $(z_n \ldots z_1 z_0)_{10} = \sum_{k=0}^{n} z_k 10^k$.

a) Berechnen Sie $10^k \bmod 8$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie: Die Zahl $(z_n \ldots z_1 z_0)_{10}$ ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die Zahl $(z_2 z_1 z_0)_{10}$ durch 8 teilbar ist.

Aufgabe# 14.4 Rationale Zahlen

a) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihe:

$$1 - \frac{3}{5} + \frac{9}{25} - \frac{27}{125} + \cdots$$

b) Geben Sie die folgende Dezimalzahl als Bruch an: $0{,}04\overline{108}$.

c) Schreiben Sie $\frac{6}{7}$ als Dezimalzahl und geben Sie deren Periode an.

Aufgabe# 14.5 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mittels Rechenregeln:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 5n + n\sqrt{n}}{3n^2 - 2n - 1}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 4}{3^{n+1}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n + 2^{-n}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + n!}{3^n - n!}$ (*Hinweis:* Beweisen Sie zuerst, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ ist).

Aufgabe# 14.6 Finden Sie alle (komplexen) Lösungen der Gleichung $x^3 - 2x + 4 = 0$.

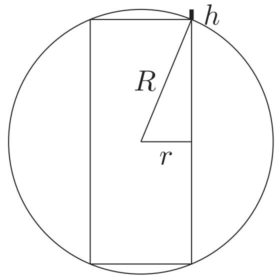
Aufgabe# 14.7 Komplexe Zahlen.

a) Es sei $z = \frac{(3 + \sqrt{3}\mathrm{i})(2 + \mathrm{i})}{4\mathrm{i} - 2} \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Polardarstellung von z und z^{-1}.

b) Skizzieren Sie die Menge $\left\{ w \in \mathbb{C} \;\middle|\; w^3 = \frac{\mathrm{i} - 1}{8\sqrt{2}} \right\}$ in der komplexen Ebene.
(Mit Begründung!)

c) Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{3\pi}{4} \right\} \text{ und } B = \left\{ z^3 \mid z \in A \right\}.$$



Aufgabe# 14.8 Der Stiel und die Kerne eines kleinen kugelförmigen Apfels mit Radius $R = 2$ cm werden (genau aus der Mitte) mit einem Apfelstecher entfernt. Wie viel Volumen bleibt übrig, wenn der zylinderförmige Apfelstecher den Radius $r = 1$ cm hat? (Zur Erinnerung: das Volumen einer Kappe der Höhe h von einer Kugel vom Radius R ist gleich $\pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$.)

Aufgabe# 14.9 Exponenten und Logarithmen

a) Vereinfachen Sie:

i) $\log_9(18) - \log_3(1) + \log_9\left(\frac{9}{2}\right) - \log_9(81)$.

ii) $\left(e^3\right)^4 \cdot e^{\log_2(64)} \cdot \left((e^{-3})^{-2}\right)^{-3}$.

b) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

i) $4^x = 0{,}125$, ii) $3\ln x = \ln 56 - \ln 7$,

iii) $\log_2(10x) = 1 + \log_2 5$, iv) $\ln x = 2\ln 5 + 3\ln 2$.

c) Bestimmen Sie den ungefähren Wert von $\ln 2$, indem Sie ihn durch die Fläche von 3 gleich breiten Trapezen nähern.

Aufgabe# 14.10 Berechnen Sie die ersten und zweiten Ableitungen der Funktionen:

a) $g(x) = e^{x^2+3}$, b) $g(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, c) $g(x) = x^{\sin x}$, d) $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Aufgabe# 14.11 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} x\ln(2x)\,dx$, b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln(2x)}{x}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$, d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\tan x} - \frac{1}{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$.

Aufgabe# 14.12 Wir definieren die Funktionen

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ sowie $\tanh^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} = 1$,

(ii) $\sinh(x+y) = \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y$.

b) Beweisen Sie: $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$.

c) Sei $\operatorname{artanh} x$ die zur $\tanh x$ inverse Funktion. Zeigen Sie, dass $(\operatorname{artanh} t)' = \frac{1}{1-t^2}$ ist.