Aufgabe 3.1 Binomialkoeffizienten

a) Beweisen Sie: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ für $n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n$.

b) Benutzen Sie Teil a) und Aufgabe 2.4a) um zu zeigen: $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.2

a) Zeichnen und berechnen Sie die ersten 12 Zeilen des Pascalschen Dreiecks (von $n = 0$ bis $n = 11$). Färben Sie in einer Zeichnung alle durch 3 teilbaren Einträge ein und in einer anderen alle durch 5 teilbaren. Sehen Sie ein Muster?

b) Berechnen Sie die folgenden Summen:
i) $\sum_{k=0}^{11}\binom{11}{k}$, ii) $\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-1)^k$, iii) $\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}2^k$.

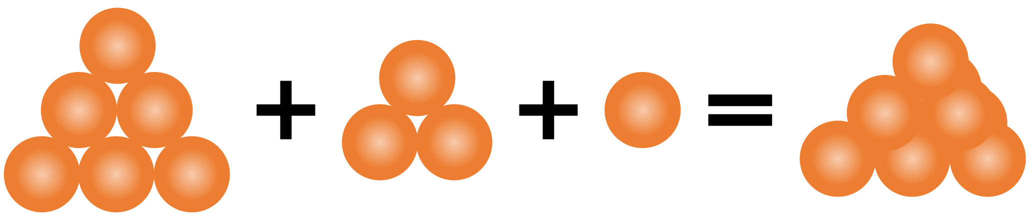
c) Beweisen Sie: Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

d) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten dritten binomischen Formel: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x-y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + xy^{n-1} + y^n) = x^{n+1} - y^{n+1}.$$

Aufgabe 3.3 Ein Obsthändler stapelt seine Orangen nach folgendem Mustern zu Tetraedern:



Die Anzahl Orangen, die er für einen Tetradeder mit Kantenlänge n benötigt, bezeichnen wir als n-te Tetraederzahl T_n.

a) Berechnen Sie die ersten fünf Tetraederzahlen.

b) Wo finden Sie diese Zahlen im Pascalschen Dreieck?

c) Stellen Sie eine Formel für die n-te Tetraederzahl auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe 3.4

a) Wenn zur Zeit 13:37 Uhr ist, wie viel Uhr ist es in 100000 Minuten?

b) Berechnen Sie die folgenden Werte:
i) 11^{100} mod 5, ii) 5^{100} mod 3, iii) 3^{102} mod 5.

Aufgabe# 3.5 Auf wie vielen Wegen lässt sich das Wort MATHERÄTSEL in der Abbildung lesen? Beginnen Sie beim Ablesen mit dem oberen Buchstaben M und gehen Sie dann immer schräg nach unten links oder unten rechts, bis Sie zu dem ganz unten stehenden Buchstaben L gelangen.

					M					
				A		A				
			T		T		T			
		H		H		H		H		
	E		E		E		E		E	
R		R		R		R		R		R
	Ä		Ä		Ä		Ä		Ä	
		T		T		T		T		
			S		S		S			
				E		E				
					L					

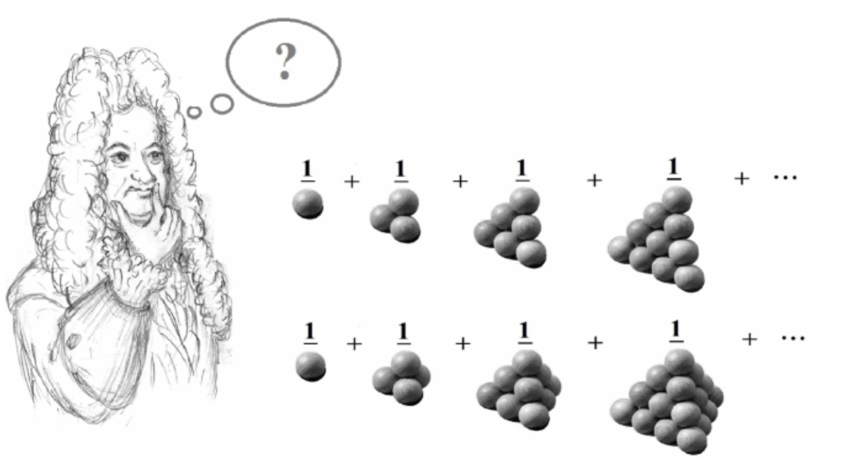
Aufgabe# 3.6 Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die natürliche Zahl $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar.

b) Die natürliche Zahl $7^{2n} - 2^n$ ist durch 47 teilbar.

Aufgabe# 3.7 Berechnen Sie die ungefähren Wahrscheinlichkeiten (in Prozent), dass beim Lotto *6 aus 49* mit einem Tipp genau r Richtige erzielt werden ($0 \leq r \leq 6$).

Aufgabe# 3.8 Helfen Sie Leibniz die Summe der reziproken Dreieckszahlen sowie die Summe der reziproken Tetraederzahlen zu bestimmen.



Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.