Elementarmathematik – WS 2017/2018 **Blatt 4**

Dr. Anton Malevich

Aufgabe 4.1

a) Beweisen Sie **Folgerung 2.7** der Vorlesung:
Ist $a \equiv b \bmod n$, so gilt auch $a^k \equiv b^k \bmod n$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie: $6^k \equiv 6 \bmod 10$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) Berechnen Sie den Rest bei der Division von 10^{42} durch 42.
(*Hinweis:* Berechnen Sie zuerst $10^{2^\ell} \bmod 42$ für verschiedene Zweierpotenzen 2^ℓ.)

Aufgabe 4.2 Teilbarkeitsregeln

a) Wir suchen eine Regel für die Teilbarkeit durch 11.

   i) Berechnen Sie $10^k \bmod 11$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

   ii) Zeigen Sie: Die Zahl $(z_n \dots z_1 z_0)_{10}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre Wechselsumme $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k z_k$ durch 11 teilbar ist.

b) Finden Sie die Regeln für die Teilbarkeit durch 8 und 9.

c) Finden Sie eine Regel für die Teilbarkeit durch 27.

Aufgabe 4.3

a) Was ist die kleinste natürliche Zahl, die den Rest 1 bei Division durch 6 und den Rest 3 bei Division durch 5 hat?

b) Gibt es eine natürliche Zahl, die den Rest 1 bei Division durch 6, den Rest 3 bei Division durch 5 und den Rest 8 bei Division durch 10 hat?

c) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl, die den Rest 1 bei Division durch 2, den Rest 2 bei Division durch 3, den Rest 3 bei Division durch 4 usw. bis den Rest 9 bei Division durch 10 hat?

Aufgabe 4.4 Dezimalentwicklung von Brüchen.

a) Bestimmen Sie für die folgenden Brüche die Dezimalentwicklung und geben Sie jeweils die Periode an:

   i) $\dfrac{1}{24}$, ii) $\dfrac{2}{27}$, iii) $\dfrac{500}{222}$.

b) Schreiben Sie die folgenden rationalen Zahlen als unkürzbare Brüche:

   i) $4{,}08\overline{3}$, ii) $1{,}12\overline{216}$, iii) $0{,}0054\overline{9}$.

Aufgabe$^{\#}$ 4.5

a) Zeigen Sie: Teilt man eine Quadratzahl durch 7, so bleibt nie der Rest 3, 5 oder 6.

b) Wenn Petra 1997 an einem Montag Geburtstag hatte, an welchem Wochentag hat sie im Jahr 2017 Geburtstag?

Aufgabe$^{\#}$ 4.6

a) Schreiben Sie $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ und $\frac{1}{13}$ als periodische Dezimalzahlen. Welche Reste treten bei der schriftlichen Division jeweils auf?

b) Berechnen Sie die Potenzen 10^k modulo 7, 11 und 13 jeweils bis sich die Werte zu wiederholen anfangen. Welchen Zusammenhang kann man zu Aufgabenteil a) erkennen?

Aufgabe$^{\#}$ 4.7 Schreiben Sie folgende rationalen Zahlen als gekürzte Brüche:

a) $\dfrac{5}{6} + \dfrac{4}{15}$, b) $\dfrac{21}{20} + \dfrac{12}{14}$, c) $0,\overline{142857}$, d) $0,\overline{27}$, e) $0,27\overline{45}$, f) $0,123\overline{456}$.

Aufgabe$^{\#}$ 4.8 Auf wie viele Nullen endet $(1000!)$? Auf wie viele Nullen endet $\binom{1000}{500}$?

Aufgabe$^{\#}$ 4.9 Was ist $10^{42} \bmod 61$?

Aufgabe$^{\#}$ 4.10 Schreiben Sie die Zahlen von 1 bis 9 hintereinander. Streichen Sie 3 mal in Folge entweder die Zahl ganz links oder ganz rechts (z.B. 1, 9, 8 oder 1, 2, 3 etc.). Addieren Sie die 3 gestrichenen Zahlen und Teilen Sie das Ergebnis durch 6 (wieso teilt 6 diese Zahl?); die 4 liegt nun an der Stelle ihres Ergebnisses.

Dies funktioniert auch für die Zahlen von 1 bis 14, das Streichen von 4 Zahlen und das Teilen durch 10; die 5 steht dann an der richtigen Stelle.

Wie verallgemeinert man dies?

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.