Aufgabe 5.1 Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ heißen *benachbart*, wenn $|ad - bc| = 1$ ist. Für zwei unkürzbare Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit $a, c \in \mathbb{N}_0$, $b, d \in \mathbb{N}$ heißt $\frac{a+c}{b+d}$ der *Mediant* von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Zeigen Sie:

a) Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ benachbart, dann sind die beiden Brüche unkürzbar.

b) Ist $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so ist $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

c) Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ benachbart, dann sind auch beide Brüche mit dem Mediant $\frac{a+c}{b+d}$ benachbart.

Aufgabe 5.2 Es Sei $\frac{a}{b}$ ein gekürzter Bruch. Der Ford-Kreis über $\frac{a}{b}$ ist der Kreis mit Mittelpunkt $M = \left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ und Radius $\frac{1}{2b^2}$.

a) Zeichnen Sie die Ford-Kreise zu den folgenden Brüchen (alle auf einer Zeichnung):

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}.$$

b) Zeigen Sie: Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zwei verschiedene Brüche mit $|bc - ad| = 1$, dann berühren sich die zugehörigen Ford-Kreise (von außen).

Aufgabe 5.3 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mittels Rechenregeln:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 + 5n + n\sqrt{n}}{3n^2 - 2n - 1}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 \cdot 3^n + 4}{3^{n+1}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n + 2^{-n}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + n!}{3^n - n!}$ (*Hinweis:* Beweisen Sie zuerst, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n!} = 0$ ist).

Aufgabe 5.4 Approximation von $\sqrt{2}$ nach Theon.

a) Zeigen Sie: Aus $0 < \dfrac{a}{b} < \sqrt{2}$ folgt $\dfrac{a+2b}{a+b} > \sqrt{2}$.

Beim Algorithmus von Theon von Smyrna zur Approximation von $\sqrt{2}$ wählt man beliebige $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$ als Anfangswerte und bestimmt iterativ $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ und $b_{n+1} = a_n + b_n$. Wir wollen zeigen, dass die Folge $\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.

b) Es gilt $\left|\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \sqrt{2}\right| < \left|\dfrac{a_n}{b_n} - \sqrt{2}\right|$. (Diese Aussage müssen Sie nicht beweisen!)

Überlegen sie, warum dies noch nicht zeigt, dass $\frac{a_n}{b_n}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Geben Sie hierzu als Gegenbeispiel eine Folge an, die dieser Bedingung genügt, aber nicht konvergent ist (*3 Punkte*) ODER die gegen 1 konvergiert (*1 Punkt*).

c) Zeigen Sie, dass $f_n = \left|2b_n^2 - a_n^2\right|$ unabhängig von n ist.

d) Zeigen Sie: $b_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = 0$.

e) Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^2 = 2$. (*Hinweis:* Benutzen Sie c) und d).)

Aufgabe# 5.5 Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ (und im Allgemeinen $\sqrt{p}$ für eine Primzahl p) keine rationale Zahl ist.

Aufgabe# 5.6 Berechnen Sie einige Folgenglieder der folgenden Folgen (Sie dürfen einen Taschenrechner verwenden). Was vermuten Sie passiert für n gegen unendlich?

a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ (Was passiert mit den Nachkommastellen?).

b) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n}$ (Was passiert mit den Nachkommastellen?).

c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$.

d) $a_1 = 27$, $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{falls } a_n \text{ gerade,} \\ 3 \cdot a_n + 1, & \text{falls } a_n \text{ ungerade.} \end{cases}$

e) $a_n = n^{20} \cdot (0{,}99)^n$.

Aufgabe# 5.7 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mittels Rechenregeln:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n}{3n^2 + 5}$,

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n^2}{3n^4 + 4}$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n\sqrt{n} + 7n + 5}{3n^2}$,

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1}{n\sqrt{n^2 + 1}}$,

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2^n}{n^2 - 2^n}$,

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n - 1}$,

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n} - 1}{2^{3n} - 3^{2n}}$,

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n! + 3n^9 - 7}{n^n + 3n^9 + 7}$.

Aufgabe# 5.8 Zwei Fahrradfahrer fahren auf einer 60 km langen geraden Strecke aufeinander zu. Jeder Fahrradfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit von 30 km/h. Eine Biene fliegt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 50 km/h vom ersten Fahrradfahrer in Richtung des zweiten Fahrradfahrers. Sobald sie diesen erreicht dreht sie um und fliegt dem ersten Fahrradfahrer entgegen. Dies wiederholt sich so lange, bis die beiden Fahrradfahrer zusammentreffen.

a) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem sich die Biene und der zweite Fahrradfahrer zum ersten mal treffen. Welche Strecke hat die Biene in dieser Zeit zurückgelegt? Wann trifft die Biene wieder beim ersten Radfahrer ein? Welcher Strecke entspricht das? Führen Sie Ihre Überlegung fort. Geben Sie die gesamte Flugstrecke der Biene mit Hilfe einer geometrischen Reihe an.

b) Lösen Sie diese Aufgabe ohne Verwendung von Reihen.

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.