Elementarmathematik – WS 2017/2018 **Blatt 7**

Dr. Anton Malevich

Definition. Für eine komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ ist $\mathrm{Re}(z) = a$ der Realteil und $\mathrm{Im}(z) = b$ der Imaginärteil von z.

Aufgabe 7.1 Es seien $z_1 = -\dfrac{6-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} - \dfrac{6}{1+\mathrm{i}}$, $z_2 = \dfrac{2+7\mathrm{i}}{3\mathrm{i}} - \dfrac{1}{\mathrm{i}}$.

Stellen Sie die Zahlen z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 + z_2}$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar. Berechnen Sie zudem $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$, $|z_1 \cdot z_2|$ und $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Aufgabe 7.2 Komplexe Zahlenebene

a) Es gibt genau zwei Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $z^2 = \mathrm{i}$. Zeichnen Sie die beiden in der komplexen Zahlenebene und berechnen Sie diese.

b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

$A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$, $C = \left\{\frac{6+8i}{5} \cdot z : z \in B\right\}$.

Aufgabe 7.3 Trigonometrie

a) Berechnen Sie $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ für $\alpha = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$. Verwenden Sie dafür nur die Definition von Cosinus und Sinus mittels des Einheitskreises, sowie elementare Eigenschaften von Dreiecken!

b) Verwenden Sie die Verdopplungsformel für den Cosinus um $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}+2}$ zu zeigen.

Aufgabe 7.4 Polardarstellung

a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polardarstellung:

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad \frac{2-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} - \frac{1+8\mathrm{i}}{5(1+3\mathrm{i})}.$$

b) Schreiben Sie $1 + \mathrm{i}$ und $1 - \mathrm{i}$ in Polardarstellung.
Zeigen Sie, dass $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

c#) Es seien $z = |z|(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$, $w = |w|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$, $w \neq 0$, zwei komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\big(\cos(\phi - \psi) + \mathrm{i}\sin(\phi - \psi)\big).$$

Was bedeutet dies geometrisch für $z = 1$?

d) Schreiben Sie die Zahl $z = \frac{(-2+2\mathrm{i})^7}{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5}$ in Polardarstellung.

Aufgabe# 7.5 Es seien $z_1 = -\frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} - \frac{3+\mathrm{i}}{4}$, $z_2 = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} - \frac{6+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}^3}$.
Stellen Sie die Zahlen z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 + z_2}$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + \mathrm{i}b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, dar. Berechnen Sie zudem $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$, $|z_1 \cdot z_2|$ und $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Aufgabe# 7.6 Skizzieren Sie die Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$, wobei

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$ und $B = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\}$,

b) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-\mathrm{i}| \leq 1\}$ und $B = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)|^2 \leq 1\right\}$,

c) $A = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z-1| \leq 4\}$ und $B = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{3-4\mathrm{i}}{z-1+2\mathrm{i}}\right| < 5\right\}$.

d) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - (2+2i)|\} = |z - (-2-2i)|$.

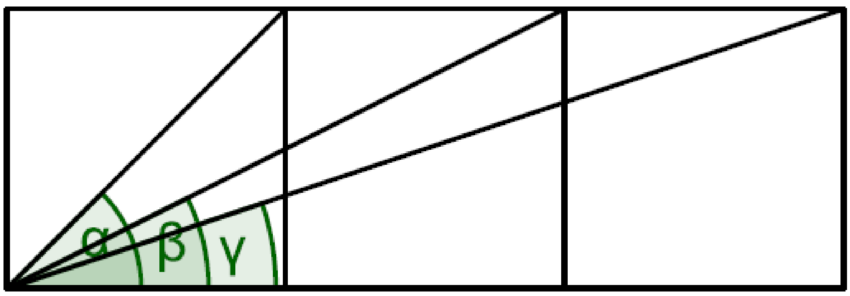
Aufgabe# 7.7 Zeigen Sie, dass alle komplexe Zahlen vom Betrag 1 und ungleich -1 als

$$\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

geschrieben werden können.

Stellen Sie konkret die Zahlen 1, i und $-\mathrm{i}$ in dieser form dar!

Aufgabe# 7.8 In der folgenden Zeichnung sind die drei Quadrate gleich groß.
Zeigen Sie $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ mit Verwendung komplexer Zahlen.



Aufgabe# 7.9 Beweisen Sie das Additionstheorem für den Tangens unter Benutzung der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.