Aufgabe 9.1 (*18 Punkte*) Betrachten Sie die Gleichung

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0. \tag{$*$}$$

a) Sei $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$. Berechnen Sie $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$. Skizzieren Sie den Graphen von f. Wie viele reelle Lösungen hat $(*)$?

Im Folgenden wollen wir die Nullstellen berechnen.

b) Substituieren Sie $y = x + \alpha$ für ein geeignetes α um die Gleichung in die Form

$$y^3 = py + q \tag{$**$}$$

zu bringen.

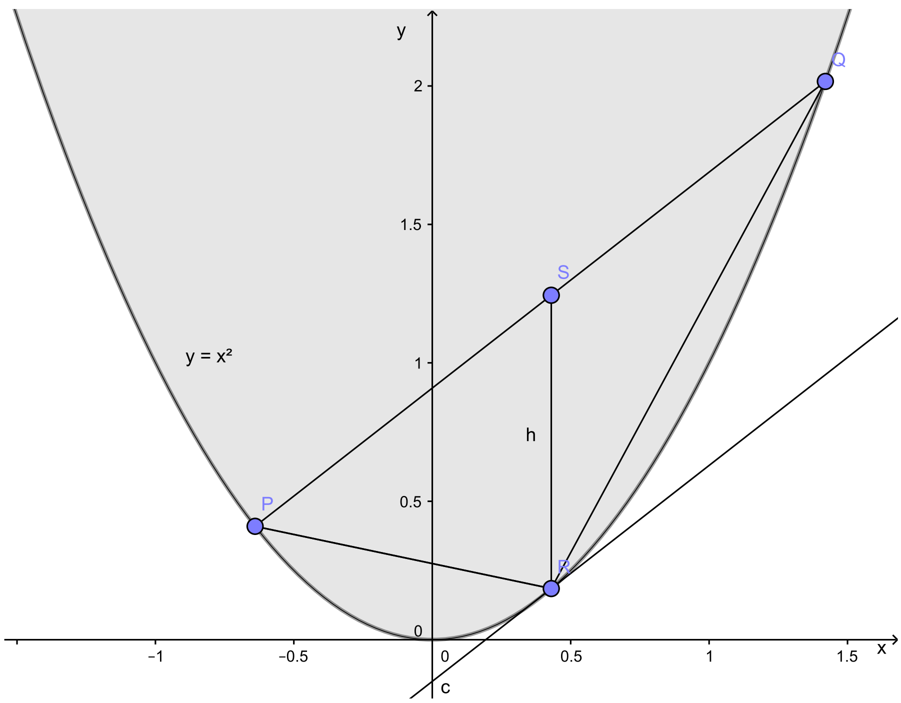
c) Verwenden Sie die Formel aus (4.21) der Vorlesung um eine Lösung y von $(**)$ zu bestimmen. Ihre Lösung sollte den Wurzelausdruck $\sqrt[3]{1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}}$ enthalten.

d) Zeigen Sie $\left(-1 + \sqrt{-\frac{2}{3}}\right)^3 = 1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}$

e) Nutzen Sie (d), um Ihr Ergebnis aus (c) zu vereinfachen. Welcher Lösung x von $(*)$ entspricht das?

f) Berechnen Sie jetzt die anderen beiden Lösungen von $(*)$.

Aufgabe 9.2 (*18 Punkte*) Auf der Parabel mit der Gleichung $y = cx^2$, $c \in \mathbb{R}$, sind zwei Punkte $P = (a, ca^2)$ und $Q = (b, cb^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, gegeben. Der Scheitelpunkt R zu P und Q ist durch die Bedingung gegeben, dass die Steigung der Parabel im Punkt R gleich der Steigung der Geraden durch P und Q ist.



a) Zeigen Sie, dass die Gerade durch P und Q durch die Gleichung $y = xc(a+b) - cab$ gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass gilt $R = \left(\frac{a+b}{2}, c\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$.
(*Hinweis:* Die Steigung der Parabel an der Stelle x ist durch $2cx$ gegeben.)

c) Zeigen Sie: $h = \frac{1}{4}c(b-a)^2$ (die Strecke h verläuft parallel zur y-Achse, siehe Bild).

d) Folgern Sie daraus: $A(\Delta PQR) = \frac{1}{8}c(b-a)^3$.

e) Zeigen Sie: Ist R' bzw. R'' der Scheitelpunkt zu P und R bzw. R und Q ist, so gilt

$$A(\Delta PRR') = A(\Delta RQR'') = \frac{1}{8}A(\Delta PQR).$$

Aufgabe 9.3 (*18 Punkte*) Finden Sie alle (komplexen) Lösungen der Gleichung

$$2x^3 + 5x^2 + 7x + 6 = 0.$$

Hinweis: Gehen Sie wie in Aufgabe 9.1b-c) vor. Dabei soll Ihre Lösung für y den Ausdruck $\sqrt[3]{\frac{1}{216}(-134 + 33\sqrt{21})}$ enthalten. Zeigen Sie nun, dass gilt:

$$\left(\frac{1}{6}(-2 + \sqrt{21})\right)^3 = \frac{1}{216}(-134 + 33\sqrt{21}).$$

Aufgabe$^{\#}$ 9.4 Wir wollen die Fläche A_k der Figur

$$F_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x^k\right\}, \text{ für } k \in K$$

ausrechnen. Dazu wählen wir eine Zahl q $(0 < q < 1)$ und zelegen das Intervall $[0,1]$ durch Intervalle mit Endpunkten $1 > q > q^2 > q^3 > \ldots$

a) Zeigen Sie, dass für A_k die folgende Einschließung gilt:

$$\frac{1-q}{1-q^{k+1}} \le A_k \le q^{-k}\frac{1-q}{1-q^{k+1}}.$$

b) Nun können wir A_k aus der oberen Ungleichung als Grenzwert als $q \to 1$ finden. Zeigen Sie, dass $A_k = \frac{1}{k+1}$ ist. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe.)

Aufgaben mit $^{\#}$ werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.