

Fragen zur Selbstkontrolle

Thema 0 Grundlagen (siehe auch Auffrischkurs)

- Was ist eine Primzahl? Wie finde ich die Primfaktoren einer natürlichen Zahl? Wie bestimme ich den größten gemeinsamen Teiler und den kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier natürlichen Zahlen?
- Wie bestimmt man die Nullstellen eines Polynoms der Form $ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$? Unter welcher Voraussetzung hat dieses Polynom keine bzw. eine bzw. zwei verschiedene reelle Nullstellen?
- Habe ich nicht vergessen, wie man Brüche addiert? Wie sieht es mit Summe zweier rationalen Funktionen (Quotient von Polynomen) aus?
- Was sind die binomische Formeln, der binomische Lehrsatz, Binomialkoeffizienten?
- Was sind π und e ? Wie sind sie definiert, was ist ihr ungefährender Wert?
- Was sind die trigonometrischen Funktionen, wie sind sie definiert? Kenne ich die wichtigsten trigonometrischen Formeln: Grundformel, Additionstheoreme, Verdopplungsformeln, Phasenverschiebung?
- Wie hängen Winkelmaß und Bogenlänge eines Winkels zusammen?
- Was sind die Werte von \sin , \cos , \tan von 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π ?
- Wie leitet man Funktionen ab? Kenne ich die Ableitungen elementarer Funktionen auswendig? Was sind Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel?
- Was versteht man unter dem Integral einer Funktion? Wie berechnet man Integrale? Was ist eine Stammfunktion? Wie hängen Stammfunktionen und Ableitungen zusammen?
- Welche Rechenregeln kann man beim Integrieren benutzen? Was sind die Substitutionsregel und partielle Integration?

Thema 1 Die ganzen Zahlen und Induktion

Grundlage: Vorlesungskript, Kapitel 1

- Was sind die geometrischen und arithmetischen Folgen? Kenne ich die Summenformeln für diese Folgen?
- Was ist das Prinzip der vollständigen Induktion? Kann man jede Aussage mit Induktion beweisen, und wenn nicht, dann welche? Was hat Induktion mit natürlichen Zahlen zu tun?
- Aus welchen drei Schritten besteht jeder Induktionsbeweis?
- Ist Induktionsanfang tatsächlich so wichtig? Kann man ihn nicht einfach weglassen?
- Was sind die Binomialkoeffizienten, welche Eigenschaften haben sie? Was ist das Pascalsche Dreieck? Was ist der binomische Lehrsatz?
- Was sind die Dreieckszahlen? Was haben sie mit Binomialkoeffizienten zu tun?

- Kann ich die Formeln für die Summen der Dreieckszahlen, Quadratzahlen und Kubikzahlen beweisen?

Thema 2 Rationale Zahlen

Grundlage: Vorlesungsskript, Kapitel 2

- Was ist Division mit Rest?
- Was bedeutet es, wenn $a \equiv b \pmod{n}$ ist? Was sind die Rechenregeln für Kongruenzen modulo n ?
- Kenne ich die Regeln für die Teilbarkeit durch 2, 3, 9? Wie kann ich eine Regel für die Teilbarkeit durch eine beliebige Zahl erstellen?
- Wann ist Dezimalentwicklung eines Bruchs abbrechend, wann periodisch? Wie bestimmt man die Dezimalentwicklung eines Bruchs? Wie kann man umgekehrt den Bruch zu einer gegebenen Dezimalentwicklung finden?
- Kann ich beweisen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist? Kann ich den Beweis auf \sqrt{p} für eine beliebige Primzahl p verallgemeinern?

Thema 3 Reelle Zahlen und Grenzwerte

Grundlage: Vorlesungsskript, Kapitel 3

- Wie ist der Grenzwert einer Folge definiert? Was sind die Rechenregeln für Grenzwerte? Was ist das “Sandwich”-Lemma (“Polizisten”-Lemma)?
- Welche elementare Grenzwerte kenne ich? Wie berechne ich den Grenzwert eines Quotients?
- Was versteht man unter einer unendlichen Summe, einem unendlichen Produkt? Was ist die Summe einer geometrischen Reihe?
- Was ist der Monotoniesatz? Liefert der Monotoniesatz auch den Grenzwert der Folge?
- Was sind Theons und Herons Verfahren für die Annäherung an $\sqrt{2}$? Verstehe ich, warum die Verfahren konvergieren? Welches der beiden Verfahren ist “schneller”?
- Was versteht man unter der harmonischen Reihe? Kann ich beweisen, dass die harmonische Reihe divergiert?
- Wie ist der verallgemeinerte Binomialkoeffizient $\binom{s}{k}$, $s \in \mathbb{R}$, definiert? Was ist die binomische Reihe?
- Wie kann man mit Hilfe der binomischen Reihe beliebige Wurzeln annähern? Wie sieht das Verfahren z.B. konkret für $\sqrt{37}$ aus?

Thema 4 Komplexe Zahlen

Grundlage: Vorlesungsskript, Kapitel 4

- Wie ist die Zahl i definiert? Was ist eine komplexe Zahl?
- Wie addiert bzw. multipliziert man komplexe Zahlen? Welche Rechenregel gelten in \mathbb{C} ? Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die multiplikative Inverse z^{-1} definiert? Wie berechnet man diese?
- Was sind Realteil, Imaginärteil, (Absolut)betrag, Argument, komplex konjugierte einer komplexen Zahl?

- Welcher Zusammenhang gibt es zwischen komplexen Zahlen und der reellen Ebene \mathbb{R}^2 ? Was ist die Gaußsche Zahlenebene? Kann ich Addition bzw. Multiplikation zweier komplexen Zahlen geometrisch deuten?

- Kann ich folgende Mengen skizzieren?

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}, \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1\}, \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 1\}, \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$

- Was versteht man unter Polardarstellung komplexer Zahlen? Inwiefern ist diese Darstellung nützlich?
- Wie kann man trigonometrische Funktionen \sin , \cos , \tan definieren? Was sind die Arcusfunktionen?
- Wie lassen sich die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus leicht mittels Geometrie der komplexen Multiplikation beweisen?
- Was ist die De Moivresche Formel? Verstehe ich deren Beweis? Wie kann ich mithilfe dieser Formel komplexe Zahlen leicht potenzieren?
- Welche komplexe Zahlen werden n -te Einheitswurzeln genannt? Wie berechnet man die n -ten Wurzeln einer Zahl $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$? Wieviele gibts es?
- Ecken welcher Figur bilden die n -ten Wurzeln einer komplexen Zahl?
- Wie löst man kubische Gleichungen, wenn man eine Lösung kennt bzw. raten kann? Wie geht man im Allgemeinen fort, wenn keine Lösung bekannt ist? Was ist die Cardanische Formel?

Thema 5 Erste Maßbestimmungen

Grundlage: Vorlesungsskript, Kapitel 5

- Wie kann man die Fläche einer krummen Figur berechnen? Wie berechnet man z.B. die Fläche unter dem Graphen von $y = x^k$?
- Was ist das Volumen eines Kegels, einer Kugel, eines Zylinders? Wie hängen diese zusammen?
- Wie ist die Kreiszahl π definiert? Was ist der ungefähre numerische Wert von π ? Welche Verfahren für die Annäherung von π kenne ich?
- Wie kann man eine Strecke von Länge π konstruieren? Was ist die Formel von Vieta?

Thema 6 Exponentialfunktion und Logarithmus

Grundlage: Vorlesungsskript, Kapitel 6

- Wie berechnet man das Vermögen nach n Jahren beim Startvermögen V und Jahreszins α %? Wie ändert sich die Formel, falls Zinsen halbjährlich, quartalweise etc. ausgezahlt werden?
- Durch welche definierende Eigenschaft wird Exponentialfunktion formal eingeführt? Was bedeutet 2^2 , 2^{-2} , $2^{4/3}$ und 2^π ?
- Was bedeutet es, dass Logarithmus eine Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Kann ich die Eigenschaften des Logarithmus allein mit Hilfe dieser Tatsache beweisen?

- Als Grenzwert welcher Folge ist die Eulersche Zahl e eingeführt. Was ist der ungefähre numerische Wert von e ? Als Grenzwert welcher Folge kann man dann e^x berechnen?
- Wie lässt sich die Fläche $A(a, b)$ unter der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ für $a \leq x \leq b$ berechnen? Welche Homogenitätseigenschaft hat diese Funktion $A(a, b)$?
- Was ist der natürliche Logarithmus \ln ? Wie ist $\ln x$, $0 < x < 1$ definiert? Wie lässt sich $\ln x$ einfach annähern?
- Wie lässt sich die Exponentialfunktion a^x bzw. der Logarithmus $\log_a x$ zu einer beliebigen Grundzahl $0 < a \neq 1$ auf die Funktion e^x bzw. $\ln x$ reduzieren?

Thema 7 Infinitesimalrechnung

Grundlage: Vorlesungsskript, Kapitel 7

- Was versteht man unter dem Integral einer Funktion?
- Wie ist die Ableitung einer Funktion mittels Grenzwertes eingeführt?
- Wie berechnet man Integrale? Was ist eine Stammfunktion? Was ist der Hauptsatz der Integral- und Differenzialrechnung?
- Welche Rechenregeln für Differentiation kenne ich? Kann ich diese Regeln beweisen?
- Welche Rechenregeln für Integration gibt es? Was sind insbesondere die Substitutionsregel und partielle Integration? Kann ich diese Regeln aus denen für Differentiation folgern?
- Kenne ich die Ableitungen elementarer Funktionen auswendig? Kann ich diese Ableitungen auch nach Definition über den Grenzwert beweisen?
- Wie berechnet man die Ableitung einer Umkehrfunktion?