**Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2016** **Blatt 1**

Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Es sind **nur** Gruppenabgaben (2–3 Personen aus derselben Übungsgruppe) erlaubt. Falls Sie mehr als ein Blatt Papier abgegen, heften Sie bitte die Blätter zusammen.
**Werfen Sie Ihre Abgabe Bitte in den richtigen Übungskasten!**

Wenn nicht anders vermerkt, gibt es pro Aufgabe immer 12 Punkte.

**Aufgabe 1.1** Unter Verwendung der Aussagen
$A$: "Der Student hat die Lehrveranstaltungen besucht."
$B$: "Der Student hat gewissenhaft studiert."
$C$: "Der Student hat die Übungsaufgaben gelöst."
$D$: "Der Student hat das Examen bestanden."
beschreiben Sie symbolisch:

a) Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht hat, gewissenhaft studiert hat und die Übungsaufgaben gelöst hat, besteht er das Examen.

b) Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht hat, aber nicht gewissenhaft studiert hat und die Übungsaufgaben nicht gelöst hat, besteht er das Examen nicht.

c) Der Student besteht das Examen genau dann, wenn er die Lehrveranstaltungen besucht hat, gewissenhaft studiert hat und die Übungsaufgaben gelöst hat.

Bilden Sie die Negation der erhaltenen Aussageverbindungen und formulieren Sie sie in Worten.

**Aufgabe 1.2** Beweisen Sie die folgende Tautologien und logischen Äquivalenzen mithilfe einer Wahrheitstabelle.

a) $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$,

b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$,

c) $\big[A \vee (B \wedge \neg B)\big] \Leftrightarrow A$,

d) $\big[A \vee (B \wedge C)\big] \Leftrightarrow \big[(A \vee B) \wedge (A \vee C)\big]$,

e$^{\#}$) $\big[(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)\big] \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$,

**Aufgabe 1.3** Es sei $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ teilt } 6\}$.

a) Wieviele Elemente hat $A$? Geben Sie $A$ explizit an.

b) Bilden Sie $\mathcal{P}(A)$ und $A \times A$. Wieviele Elemente haben diese Mengen?

c) Es sei nun $B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 0 \leq x \leq 5\}$. Bestimmen Sie $A \cap B$, $B \cup A$, $B \setminus A$, $A \setminus B$.

**Aufgabe 1.4** Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an! Machen Sie zu jedem Teil eine Skizze.)

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

b) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \cup C) \setminus (B \setminus D)$.

c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

**Aufgabe# 1.5** Die Aussage $A$ sei "$5 > 9$", die Aussage $B$ sei "Gerhard Schröder ist eine Frau". Vervollständigen Sie die folgende Wahrheitstabelle.

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $\neg B$ | $\neg A$ | $\neg A \vee B$ | $A \wedge B \Rightarrow \neg B$ | $\neg A \vee B \Leftrightarrow A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Aufgabe# 1.6** Wir bilden aus den Aussagen $A$, $B$, $C$, $D$ (die falsch oder wahr sein können) folgende Prädikate:

a) $A \Rightarrow \neg A$,

b) $A \vee \neg A \Rightarrow A \wedge \neg A$,

c) $A \wedge \neg A \Rightarrow A \vee \neg A$,

d) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow A \vee \neg A$,

e) $A \wedge B \Rightarrow C \vee D$,

f) $A \vee (\neg A \wedge B) \Rightarrow \neg B$,

g) $[(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)] \Rightarrow (A \vee B)$,

h) $(A \vee B \Rightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)]$,

i) $[(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)]$.

Welche von diesen sind immer wahr bzw. immer falsch bzw. je nach Belegung von $A$, $B$, $C$, $D$ wahr oder falsch?

**Aufgabe# 1.7** Für alle $n \geq 1$ sei $A_n = \left\{ \frac{a}{n} \,\middle|\, a \in \mathbb{N} \right\}$.
Bestimmen Sie

$$A_3, \quad \bigcap_{n \geq 1} A_n, \quad \bigcup_{n \geq 1} A_n, \quad A_n \cap A_m.$$

**Aufgabe# 1.8** Es seien $A, B, C$ Mengen. Welche der Aussagen sind richting? (Beweisen Sie, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an! Machen Sie zu jedem Teil eine Skizze.)

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

e) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.