Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2016 **Blatt 10**

Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Es sind **nur** Gruppenabgaben (2–3 Personen aus derselben Übungsgruppe) erlaubt. Falls Sie mehr als ein Blatt Papier abgegen, heften Sie bitte die Blätter zusammen.

Aufgabe 10.1 Polardarstellung

a) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahlen in Polardarstellung:

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}, \quad \frac{2-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} - \frac{1+8\mathrm{i}}{5(1+3\mathrm{i})}.$$

b) Schreiben Sie $1+\mathrm{i}$ und $1-\mathrm{i}$ in Polardarstellung.
Zeigen Sie, dass $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

c) Es seien $z = |z|(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$, $w = |w|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$, $w \neq 0$, zwei komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\big(\cos(\phi-\psi) + \mathrm{i}\sin(\phi-\psi)\big).$$

Was bedeutet dies geometrisch für $z = 1$?

d) Schreiben Sie die Zahl $z = \frac{(-2+2\mathrm{i})^7}{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5}$ in Polardarstellung.

Aufgabe 10.2 Geometrie

a) Skizzieren Sie die Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$, wobei
$A = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z-1| \leq 4\}$ und $B = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{3-4\mathrm{i}}{z-1+2\mathrm{i}}\right| < 5\right\}$.

b) Bestimmen Sie die Polardarstellung von $w = \dfrac{\mathrm{i}}{-3+3\mathrm{i}}$.
Bestimmen und skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : z^4 = w\}$.

Aufgabe 10.3 Warum sind die folgenden Mengen U Unterräume von V? Geben Sie eine Basis von U an und bestimmen Sie $\dim U$. Ergänzen Sie dann die Basis von U zu einer Basis von V.

a) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - 2a_2 + 3a_3 - 4a_4 = 0\}$.

b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \left\{\left(a, \frac{a}{3} + b, b - \frac{c}{2}, a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}\right) : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$.

c) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -3 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \right\rangle$.

Aufgabe 10.4 Es seien im $\mathbb{R}^4$ die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (4,4,0,0),\ v_3 = (3,4,2,1),\ v_4 = (2,3,1,0),\ v_5 = (1,0,0,0).$$

a) Zeigen Sie: $M = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ ist linear abhängig.
Ist M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$? (Mit Begründung!)

b) Zeigen Sie, dass $\langle v_1 \rangle \cup \langle v_2 \rangle$ kein Unterraum von V ist,
und $\langle v_1, v_4, v_5 \rangle \cup \langle v_3 \rangle$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe# 10.5 Skizzieren Sie die Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$, wobei

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$ und $B = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\}$,

b) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z+\mathrm{i}| \leq 2\}$ und $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\}$,

c) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-\mathrm{i}| \leq 1\}$ und $B = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)|^2 \leq 1\right\}$.

Aufgabe# 10.6 Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

Aufgabe# 10.7 Es seien $w_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, $w_2 = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$

a) Bestimmen Sie die Polardarstellung von w_1 bzw. w_2.

b) Lösen Sie die beiden Gleichungen $z^5 = w_1$ bzw. $z^5 = w_2$ nach z.

Aufgabe# 10.8 Es sei V ein K-Vektorraum, $v, w, x \in V$, $\lambda \in K$. Ferner bezeichnen wir mit $\mathbf{0}$ den Nullvektor ($\mathbf{0} \in V$) und mit 0 die Zahl Null ($0 \in K$).
Leiten Sie die foglenden Aussagen aus den Vektorraumaxiomen her.

a) Aus $v + x = v$ folgt stets $x = \mathbf{0}$.

b) Ist $x + v = x + w$, so folgt $v = w$.

c) $0 \cdot v = \mathbf{0}$ und $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

d) Aus $\lambda \cdot x = \mathbf{0}$ folgt entweder $\lambda = 0$ oder $x = \mathbf{0}$.

e) $(-1) \cdot v = -v$.

Aufgabe# 10.9 Es bezeichne $\mathrm{Abb}(A, \mathbb{R})$ die Menge aller Abbildungen $f : A \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(A, \mathbb{R})$ mit Addition $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und Skalarmultiplikation $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ für $f, g \in \mathrm{Abb}(A, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in A$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

b) Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Unterräume von V sind:

$$U = \{f \in V : f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \text{ und}$$
$$W = \{g \in V : g(x) = -g(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}\ .$$

Zeigen Sie ferner: $U \cap W = \{0\}$.

c) Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. (Die Elemente von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ nennt man auch Folgen.) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen U Unterräume von V sind.

(i) $U = \left\{a \in V : \lim\limits_{n\to\infty} a = 0\right\}$.

(ii) $U = \{a \in V : \text{es gibt ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } a(n) = 0 \text{ für alle } n \geq N\}$.

Aufgabe# 10.10 Es sei $V = \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Beweisen Sie:

a) Jede Gerade durch den Ursprung ist ein Unterraum von V.

b) Eine Gerade, die nicht den Ursprung enthält, ist kein Unterraum von V.

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.

Aufgabe# 10.11 Warum sind die folgenden Mengen U Unterräume von V? Geben Sie eine Basis von U an und bestimmen Sie $\dim U$. Ergänzen Sie dann die Basis von U zu einer Basis von V.

c) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \left\langle \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right), \left(-2, 0, 1\right), \left(1, 1, -1\right), \left(0, -1, \frac{1}{2}\right) \right\rangle$.

b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(a, a-b, a-c, b+c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe# 10.12 Es sei $M = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, wobei

$$v_1 = \big(1, 2, 0\big)\,, \quad v_2 = \big(0, 1, 3\big)\,, \quad v_3 = \big(1, 0, 0\big)\,, \quad v_4 = \big(1, 1, 1\big) \ \in \mathbb{R}^3\,.$$

a) Zeigen Sie: M ist linear abhängig.

b) Beweisen Sie, dass M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist. Wählen Sie dazu drei Vektoren von M aus, die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe# 10.13 Schnitt und Summe der Unterräume.

a) Zeigen Sie, dass

$$U = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)\Big\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^5$ ist.

b) Berechnen Sie den Durchschnitt $U \cap V$ von U und dem Erzeugnis

$$V = \big\langle (1, 1, 1, 0, 0), (2, 2, 1, 0, 0) \big\rangle$$

und geben Sie eine Basis B von $U \cap V$ an.

c) Bestimmen Sie Basen C von U und D von V, die B enthalten.

d) Wenn Sie die im Teil c) konstruierten Basen zusammenstellen, erhalten Sie eine Basis $C \cup D$ von $U + V$. Zeigen Sie dies.