Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2016 **Blatt 11**

Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Es sind **nur** Gruppenabgaben (2–3 Personen aus derselben Übungsgruppe) erlaubt. Falls Sie mehr als ein Blatt Papier abgegen, heften Sie bitte die Blätter zusammen.

Aufgabe 11.1 Lineare Gleichungssysteme

a) Entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ über $\mathbb{R}$ lösbar ist, indem Sie die Matrix $(A|b)$ in Zeilenstufenform bringen. Geben Sie die Lösungsmenge an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 11 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ an.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.2 Es seien $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare Abbildung mit Matrizen

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ bzw. } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Kern, Bild und Rang von P. Geben Sie je eine Basis von $\operatorname{Ker} P$ und $\operatorname{Bild} P$ an.

b) Bestimmen Sie Kern, Bild und Rang von $B_1 = PD$ und $B_2 = DP$. Geben Sie je eine Basis von $\operatorname{Ker} B_i$ und $\operatorname{Bild} B_i$ für $i = 1, 2$ an.

c) Es seien $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare Abbildungen. Beweisen Sie: $\operatorname{Bild}(B \circ A) \leq \operatorname{Bild} B$, $\operatorname{Ker} B \leq \operatorname{Ker}(A \circ B)$ mit Gleichheiten für beliebige B genau dann, wenn A ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 11.3 Es seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume und $A : V \to W$ eine lineare Abblidung.

a) Beweisen Sie: A ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ ist, und genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{Bild} A = W$ ist.

b) Zeigen Sie: $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Bild} A = \dim V$.
(*Hinweis:* Ergänzen Sie eine Basis von $\operatorname{Ker} A$ zu einer Basis von V.)

Aufgabe 11.4 Es seien $V = \mathbb{C}^3$ und $f : V \to V$ eine Abbildung mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z - x - y \\ z - x \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist. Bestimmen Sie Kern und Bild von f und $f^2 = f \circ f$ sowie allgemein von $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ mal}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe# 11.5 a) Entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ über $\mathbb{R}$ lösbar ist, indem Sie die Matrix $(A|b)$ in Zeilenstufenform bringen. Geben Sie die Lösungsmenge an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 8 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

c) Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \\ 6 & -3 & 7 & 8 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe# 11.6 a) Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte von je zwei dieser Matrizen.

b) Welcher Zusammenhang besteht generell für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwischen $(A^T)^m$ und $(A^m)^T$? Berechnen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ die Matrizen A^5 und $\left(A^T\right)^5$ mit so wenig Rechenaufwand wie möglich!

Aufgabe# 11.7 Es seien $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$f(e_1) = (1,3), \quad f(e_2) = (2,0), \quad f(e_3) = (2,1).$$

Bestimmen Sie $\operatorname{Ker} f$ und $\operatorname{Bild} f$.

Aufgabe# 11.8 Bestimmen Sie jeweils den Rang von A, A^2 und A^3 sowie von B, B^2 und B^3, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Aufgabe# 11.9 Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrizen, indem Sie diese auf Zeilenstufenform bringen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -4 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.