Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2016 **Blatt 12**

Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Es sind **nur** Gruppenabgaben (2–3 Personen aus derselben Übungsgruppe) erlaubt. Falls Sie mehr als ein Blatt Papier abgegen, heften Sie bitte die Blätter zusammen.

Aufgabe 12.1 Es seien $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \mathbb{R}^3$ mit Standardbasen $S = \{s_1, s_2\}$ und $T = \{t_1, t_2, t_3\}$. Es seien ferner zwei weitere Basen gegeben: $S' = \{v_1, v_2\}$ von V und $T' = \{w_1, w_2, w_3\}$ von W, wobei

$$v_1 = s_1 - s_2, \quad v_2 = -2s_1 + s_2,$$
$$w_1 = t_1 - t_3, \quad w_2 = t_2 + t_3, \quad w_3 = t_3.$$

Es sei $A : V \to W$ linear mit $A(v_1) = w_1$ und $A(v_2) = w_2$. Die Darstellungsmatrix von A bzgl. der Basen S' und T' ist also

$${}_{T'}A_{S'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{T}A_{S'}$ von A bzgl. der Basen S' und T.

b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{T}A_{S}$ von A bzgl. der Basen S und T.

c) Bestimmen Sie $\operatorname{Ker} A$ und $\operatorname{Bild} A$.

Aufgabe 12.2 Quotientenraum

a) Es sei $V = \mathbb{R}^4$ mit Standardbasis $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ und $A : V \to V$ die lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix

$${}_{E}A_{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Es sei ferner $U = \operatorname{Ker} A$. Zeigen Sie: $\dim U = 2$ und $U = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Es sei $B = \{v_1, v_2, e_2, e_1\}$. Finden Sie die Darstellungsmatrix ${}_{B}A_{B}$.

Wir definieren die Abbildung $\mathcal{A} : V/U \to V/U$ durch $\mathcal{A}(v + U) = A(v) + U$ für $v \in V$. Erklären Sie, warum $\mathcal{B} = \{e_2 + U, e_1 + U\}$ eine Basis von V/U ist und finden Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Berechnen Sie $\det \mathcal{A}$ und zeigen somit, dass $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus von V/U ist.

b) Es sei V ein Vektorraum und $U \leq V$. Zeigen Sie: $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$.

~~c) Es seien V ein Vektorraum, $A : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $U = \operatorname{Ker} A$ und $\mathcal{A} : V/U \to V/U$ die lineare Abbildung definiert durch $\mathcal{A}(v + U) = A(v) + U$. Beweisen Sie, dass $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus ist.~~

Aufgabe 12.3 Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen und entscheiden Sie in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ob die Matrizen invertierbar sind.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{-1} und B^{-1} für alle Werte von a, b, c, d, für die A und B invertierbar sind.

Aufgabe 12.4 Determinanten

a) Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen mit Gauß-Algorithmus:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und } B = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a & \cdots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, n \in \mathbb{N}.$$

b) Es bezeichne D_n die folgende Determinante:

$$D_n = \det \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{n}.$$

Beweisen Sie mit Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $D_n = n + 1$ gilt.
(*Hinweis:* Entwickeln Sie die Determinante nach der ersten Spalte und ermitteln Sie eine rekursive Formel für D_n.)

Aufgabe$^{\#}$ 12.5 Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$ mit Basen $S = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ bzw. $T = \{(0,1),(1,1)\}$. Es sei ferner $A : V \to W$ die lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix

$${}_TA_S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von A bezüglich der Standardbasen von V und W sowie $\operatorname{Ker} A$ und $\operatorname{Bild} A$.

Aufgabe$^{\#}$ 12.6 Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

sowie

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & b & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & a+b & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe$^{\#}$ 12.7 Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Aufgabe# 12.8 Es sei K ein Körper und es seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$.
Beweisen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & X + a_{n-1} \end{pmatrix} = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

mittels

a) Laplace-Entwicklung (d.h. nach Definition),
b) elementarer Zeilenumformungen,
c) Leibniz-Formel.

Aufgabe# 12.9 Es seien

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 1 & 10 & 8 & 3 & 4 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 9 & 7 & 5 & 6 & 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Permutationen aus S_{10}.

a) Schreiben Sie σ_1, σ_2 und σ_3 in Zykelschreibweise als Produkt von elementfremden Zykeln.

b) Bestimmen Sie die Zykelschreibweisen von $\sigma_2 \circ \sigma_3$, $\sigma_3 \circ \sigma_2$, $(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$, $\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$, $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_3^{-1}$, $(\sigma_2 \circ \sigma_3)^{-1}$ und $(\sigma_3 \circ \sigma_2)^{-1}$.

Aufgabe# 12.10

a) Schreiben Sie $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ als Produkt von Transpositionen und bestimmen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma_1)$ und $\operatorname{sgn}(\sigma_2)$, wobei

$$\sigma_1 = (1\ 2\ \cdots\ n-1\ n), \quad \sigma_2 = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_\ell).$$

b) Es habe $\sigma \in S_n$ in Zykelschreibweise als Produkt von elementfremden Zykeln genau k Zykel der Längen $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$.
Beweisen Sie: $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{(\ell_1 - 1) + (\ell_2 - 1) + \ldots + (\ell_k - 1)}$.

c) Bestimmen Sie das Signum von

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 11 & 6 & 9 & 8 & 7 & 10 & 12 \end{pmatrix} \in S_{12}.$$

Aufgabe# 12.11 Wir definieren für ein $\sigma \in S_n$ die Zahl $k(\sigma)$ als

$$k(\sigma) = \left|\{(i,j) : 1 \le i < j \le n,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}\right|.$$

Beweisen Sie: $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{k(\sigma)}$.