Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Es sind **nur** Gruppenabgaben (2–3 Personen aus derselben Übungsgruppe) erlaubt. Falls Sie mehr als ein Blatt Papier abgegen, heften Sie bitte die Blätter zusammen.
Werfen Sie Ihre Abgabe Bitte in den richtigen Übungskasten!

Aufgabe 2.1 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

a) Begründen Sie, warum f eine Funktion ist.

b) Berechnen Sie $f(\mathbb{R})$ und $f(A)$, wobei $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$ ist.

c) Berechnen Sie $f^{-1}(\{1\})$ und $f^{-1}(B)$, wobei $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$ ist.

d) Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

Aufgabe 2.2

a) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. (Begründen Sie Ihre Antwort!)

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 & h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ f(x) = 2x - 3 & g(x) = (1, 2x - 3) & h(x_1, x_2) = (x_2^2, x_1^2). \end{array}$$

b) Bestimmen Sie, welche der folgenden Kompositionen von Funktionen existieren, und geben Sie für diese Kompositionen die Vorschrift für F_j explizit an:

$$F_1 := f \circ g, \quad F_2 := g \circ f, \quad F_3 := h \circ f, \quad F_4 := g \circ h, \quad F_5 := h \circ g, \quad F_6 := h \circ h.$$

c) Falls F_j existiert, beschreiben Sie die Bildmenge von F_j.

Aufgabe 2.3 Trigonometrie

a) Leiten Sie das Additionstheorem für Cosinus

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

aus dem Additionstheorem für Sinus her.

b) Leiten Sie aus den Additiontheoremen für Sinus und Cosinus die folgenden Aussagen her:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}.$$

Aufgabe 2.4 Induktion

a) Ist $n^2 - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ ungerade, durch 8 teilbar?

b) $a^n + b^n \leq (a+b)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$.

c) $\displaystyle\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-1)m} = 1 - \frac{1}{n}$.

Aufgabe$^{\#}$ 2.5 Gegeben sei die Abbildung

$$f : \{-2, 0, 1, 2, 3\} \to \{-16, -1, 0, 1, 4, 16, 81, 256\} \text{ durch } x \mapsto x^4$$

Bestimme folgende Mengen:
$f(\{0, 3\})$, $f(\{-2, 2\})$, $f^{-1}(\{-16, 0, 16\})$, $f^{-1}(\{-1, 4, 256\})$, $f^{-1}(\{-1, 1, 81\})$.

Aufgabe$^{\#}$ 2.6 Welche der folgenden Relationen sind Funktionen von A nach B? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

(i) $A = B = \{2, 4, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(2, 2), (4, 4), (2, 6)\}$.

(ii) $A = B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = y^2 \right\}$.

(iii) $A = B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x^2 \right\}$.

Bestimmen Sie Definitionsmenge und Wertemenge der Funktionen.

Aufgabe$^{\#}$ 2.7 Es sei $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x \leq 2\}$. die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{3}{5+x^2}$.

(i) Bestimmen Sie $f^{-1}\left(\left\{\frac{3}{5}\right\}\right)$ und $f^{-1}(B)$, wobei $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq \frac{1}{2} \right\}$.

(ii) Bestimmen Sie die Wertemenge $f(A)$.

(iii) Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv? (Begründen Sie!)

Aufgabe$^{\#}$ 2.8 Es seien zwei Funktionen gegeben

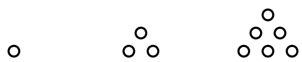
$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto 1 + x^2 & \quad x \mapsto (1, x^2). \end{array}$$

Bestimmen Sie, welche der Kompositionen existieren, und geben Sie für diese Kompositionen die Funktionsvorschrift explizit an:

$$f \circ g, \quad g \circ f, \quad f \circ f, \quad g \circ g.$$

Aufgabe$^{\#}$ 2.9 Zeigen Sie: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Zeigen Sie allgemein für eine Primzahl p, dass $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. (*Hinweis:* Benutzen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.)

Aufgabe$^{\#}$ 2.10 Dreieckszahlen



(i) Betrachten Sie die sogenannten Dreieckszahlen D_n: $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 6$, ...
Zeigen Sie, dass $D_n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ ist.

(ii) Berechne 1^3, $1^3 + 2^3$, $1^3 + 2^3 + 3^3$, etc. Stellen Sie eine Vermutung über das Verhältnis zu den Zahlen D_n auf.

(iii) Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.

Aufgabe$^{\#}$ 2.11 Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) $(x - 1) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^n - 1$, insbesondere $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n + 2}{2^n}$.

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.

Aufgabe# 2.12 Induktion

a) Zeigen Sie, dass $2n^3 + 4n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

b) In der Vorlesung wurde die folgende Formel bewiesen:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Können Sie aber, ohne diese Formel zu benutzen, zeigen, dass $n(n+1)(2n+1)$ tatsächlich für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist?

c) Ermitteln Sie die Anzahl d_n der Diagonalen (Verbindungsstrecken zwischen zwei Ecken, die keine Kanten sind) in einem ebenen n-Eck für $n \geq 4$. Beweisen Sie Ihre gefundene Formel.

Aufgabe# 2.13 Ermitteln Sie die Anzahl d_n der Diagonalen (Verbindungsstrecken zwischen zwei Ecken, die keine Kanten sind) in einem ebenen n-Eck für $n \geq 4$. Beweisen Sie Ihre gefundene Formel.

Aufgabe# 2.14 Sei A eine Menge. Beweisen Sie, dass es keine Surjektion von A nach $\mathcal{P}(A)$ gibt. (*Hinweis:* Sei $f : A \to \mathcal{P}(A)$ eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie, dass $\{a \in A \,|\, a \notin f(a)\} \notin f(A)$.)

Aufgabe# 2.15 Eine kleine Warnung zur vollständigen Induktion: manchmal muss man bei solchen Beweisen sehr genau hinschauen, sonst können sich Fehler einschleichen. Wir werden nun eine offensichtlich falsche Aussage mit vollständiger Induktion beweisen. Ihre Aufgabe ist, den Fehler im Beweis zu finden. Die Aussage lautet:

"Alle Studierenden an der Universität Mainz studieren das Gleiche."

Es sei $A(n)$ die Aussage

"In einer beliebigen Menge von n Studierenden studieren alle das Gleiche,"

die im Folgenden mit vollständiger Induktion bewiesen wird.

Beweis. Induktionssanfang: Sei $n = 1$. In einer beliebigen Menge, die nur einen Studenten oder eine Studentin enthält, ist die Aussage klar.

Induktionsschritt: Nehmen wir an, die Aussage sei für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Wir nehmen uns nun eine beliebige Menge M her, in der $n+1$ Studierende sind und wollen zeigen, dass die alle das Gleiche studieren. Geben wir den Elementen von M Namen:

$$M = \{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}.$$

Betrachten wir nun eine Teilmenge von M, in welcher der erste Studierende fehlt:

$$M' = \{a_2, a_3, ..., a_{n+1}\}.$$

M' enthält nur n Studierende und die studieren nach Induktionsvoraussetzung alle das Gleiche. Fehlt noch a_1, aber zu diesem Zweck betrachten wir eine zweite Teilmenge:

$$M'' = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Auch in dieser Menge sind nur n Studierende enthalten, die wieder nach Induktionsvoraussetzung alle das Gleiche studieren. Nehmen wir uns nun ein beliebiges Element a_k aus dem Schnitt (also ein a_k aus der Menge $\{a_2, ..., a_n\}$), so folgt, dass a_1 das Gleiche studiert wie a_k und a_k das Gleiche wie a_{n+1}, denn a_1 und a_k liegen in M'' und a_k und a_{n+1} liegen in M'. Damit ist die Aussage bewiesen und alle Studierenden aus M studieren das Gleiche.

Aufgaben und Aufgabenteile mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.