

Es sind **nur** Gruppenabgaben (2–3 Personen aus derselben Übungsgruppe) erlaubt. Falls Sie mehr als ein Blatt Papier abgeben, heften Sie bitte die Blätter zusammen.

**Werfen Sie Ihre Abgabe Bitte in den richtigen Übungskasten!**

**Aufgabe 3.1** Basen in  $\mathbb{R}^2$ .

- a) Es sei  $a = (1, 1)$ ,  $b = (-1, 1)$ . Beweisen Sie, dass  $(a, b)$  eine Basis von  $\mathbb{R}^2$  ist. Berechnen Sie die Koordinaten von  $(-1, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-4, 0)$ ,  $(1, 5)$  und  $(-3, 7)$  bezüglich der Basis  $(a, b)$ .
- b) Es seien die Vektoren  $a = (\lambda - 1, \lambda)$  und  $b = (\mu - 3, \mu)$  gegeben. Für welche  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist  $(a, b)$  eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ ?

**Aufgabe 3.2** Gleichung- und Parameterdarstellung der Geraden.

- a) Bestimmen Sie für die folgenden Geraden je eine Gleichung:

$$(1, 1) + \mathbb{R}(-1, 0), \quad (1, 4) + \mathbb{R}(-1, 2), \quad (1, -2) + \mathbb{R}(-1, 2).$$

- b) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung für die folgenden Geraden:

$$2x + y = 6, \quad -x - \frac{1}{2}y = 0, \quad 5y = 5.$$

**Aufgabe 3.3** Kollineare Punkte.

- a) Es seien  $a, b, c$  drei Punkte in  $\mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie:  $a, b, c$  liegen genau dann auf einer Geraden, wenn  $\det(c - a, b - a) = 0$  ist. (*Hinweis:* Vgl. mit Aufgabe<sup>#</sup> 3.8.)
- b) Prüfen Sie, ob  $(3, 2)$ ,  $(6, -1)$ ,  $(2, 3)$  auf einer Geraden liegen.
- c) Die Punkte  $(\lambda, 3)$ ,  $(6, 1)$  und  $(-3, 4)$  liegen auf einer Geraden. Bestimmen Sie  $\lambda$ .
- d<sup>#</sup>) Prüfen Sie, ob  $(1, 3)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(5, 0)$  und  $(4, 4)$  auf einer Geraden liegen.

**Aufgabe 3.4** Es sei die lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben mit

$$A(x, y) = (2x - y)(1, 2).$$

- a) Bestimmen Sie die Matrix der Abbildung  $A$ .
- b) Ist  $A$  injektiv, surjektiv, bijektiv?

**Aufgabe# 3.5** Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mithilfe der Cramerschen Regel.

- a)  $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ ,
- b)  $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 5y = 10 \end{cases}$ ,
- c)  $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ ,
- d)  $\begin{cases} x \cos \alpha - y \sin \alpha = \cos \beta \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin \beta \end{cases}$ .

**Aufgabe# 3.6** Hat das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x - y = c_1 \\ x + y = c_2, \end{cases}$$

für alle  $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$  eine eindeutige Lösung?

**Aufgabe# 3.7** Es sei  $a = (-1, 3)$ ,  $b = (2, 1)$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $(a, b)$  eine Basis von  $\mathbb{R}^2$  ist.
- b) Berechnen Sie die Koordinaten von  $(-1, 1)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(-3, 2)$  und  $(0, 7)$  bezüglich der Basis  $(a, b)$ .

**Aufgabe# 3.8**

- a) Es seien  $a, b \in \mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie, dass  $(a, b)$  genau dann keine Basis von  $\mathbb{R}^2$  ist, wenn es eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  existiert mit  $b = \lambda a$  oder  $a = \lambda b$  (solche  $a$  und  $b$  heißen parallel).
- b) Es seien  $a, b \in \mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie, dass  $a + \mathbb{R}b$  genau dann eine Gerade durch  $(0, 0)$  ist, wenn  $\det(a, b) = 0$  ist.
- c) Es seien  $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ . Finden Sie ein Kriterium dafür, dass  $c$  auf der Geraden  $a + \mathbb{R}b$  liegt.

**Aufgabe# 3.9** Für eine Basis  $(a, b)$  von  $\mathbb{R}^2$  nennt man die lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $A(xa + yb) = xa$  die Parallelprojektion auf  $\mathbb{R}a$  entlang  $b$ ,

- a) Finden Sie die koordinaten der Vektoren  $e_1 = (1, 0)$  und  $e_2 = (0, 1)$  bezüglich der Basis  $((1, 1), (-1, 1))$ .
- b) Bestimmen Sie die Matrix der Parallelprojektion  $A$  auf  $\mathbb{R}(1, 1)$  entlang  $(-1, 1)$ .
- c) Bestimmen Sie die Matrix der Parallelprojektion auf  $\mathbb{R}(1, 0)$  entlang  $(0, 1)$ .

**Aufgabe# 3.10** Es sei  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nicht injektive lineare Abbildung, die aber keine Nullabbildung ist. Beweisen Sie:

- a)  $\text{Ker } A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid A(x_1, x_2) = (0, 0)\}$  ist eine Gerade durch  $(0, 0)$ .
- b) Das Bild  $A(\mathbb{R}^2)$  ist ebenfalls eine Gerade durch  $(0, 0)$ .