Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2016 **Blatt 4**

Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Es sind **nur** Gruppenabgaben (2–3 Personen aus derselben Übungsgruppe) erlaubt. Falls Sie mehr als ein Blatt Papier abgegen, heften Sie bitte die Blätter zusammen.
Werfen Sie Ihre Abgabe Bitte in den richtigen Übungskasten!

Aufgabe 4.1 Es seien $a = (-1, 1)$, $b = (2, -1)$, $c = (1, 3)$ $B = (a, b)$, $C = (c, b)$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass B und C Basen von $\mathbb{R}^2$ sind.

b) Berechnen Sie die Koordinaten von $(1, 0)$ und $(0, 1)$ sowie von a, b und c bezüglich der Basen B und C.

c) Berechnen Sie ${}_BA_E$, ${}_EA_B$ und ${}_BA_B$ sowie ${}_CA_B$ und ${}_BA_C$, wobei E die Standardbasis bezeichnet.

Aufgabe 4.2 (*18 Punkte*) Basis zu einer vorgegebenen Matrix.

a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^2$, so dass ${}_BA_B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ist diese Basis durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt?

b) Es seien $c, s \in \mathbb{R}$ mit $c^2 + s^2 = 1$. Es sei ferner $A = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$.

Gibt es eine Basis B von $\mathbb{R}^2$, so dass ${}_BA_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Falls ja, geben Sie eine solche an!

c) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass es keine Basis B von $\mathbb{R}^2$ sowie keine $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt, sodass ${}_BA_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4.3 Berechnen Sie die Inversen (falls sie existieren!) folgender Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.4 (*8 Punkte*) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $\|a\| = \|b\|$. Zeigen Sie, dass $a - b \perp a + b$. Zeichnen Sie ein Bild hierzu.

Stimmt auch die Umkehrung, d.h. folgt aus $a - b \perp a + b$ stets $\|a\| = \|b\|$?

Aufgabe$^{\#}$ 4.5 Es seien $a = (1, -2)$, $b = (1, 3)$, $B = (a, b)$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass B eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Berechnen Sie die Koordinaten von $(1, 0)$ und $(0, 1)$ bezüglich der Basis B.

c) Berechnen Sie ${}_BA_E$, ${}_EA_B$ und ${}_BA_B$, wobei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

d) Es sei $C = \big((0, -1), (-1, 1)\big)$ eine weitere Basis. Berechnen Sie ${}_CA_B$ sowie ${}_BA_C$.

Aufgabe$^{\#}$ 4.6 Es seien $a = (-1, 1)$, $b = (2, -1)$, $B = (a, b)$ und $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie ${}_BA_B$.

Aufgabe$^{\#}$ 4.7 Berechnen Sie die Inversen (falls sie existieren!) folgender Matrizen.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe$^{\#}$ 4.8 Es seien ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $\|C - B\| = a$, $\|C - A\| = b$, $\|B - A\| = c$ und ℓ eine Gerade durch A und B. Es sei D der Fußpunkt von C auf ℓ. Es seien ferner $p = \|D - B\|$, $q = \|D - A\|$ und $h = \|D - C\|$. Nehmen Sie an, dass $C - A \perp C - B$.

a) Zeigen Sie, dass $h^2 = pq$.

b) Beweisen Sie, dass $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$.

Bemerkung: Für eine Gerade ℓ und einen Punkt C mit $C \notin \ell$ existiert genau ein Punkt $D \in \ell$, sodass $C - D$ ein Normalenvektor von ℓ ist. Den Punkt D nennen wir den Fußpunkt von C auf ℓ.