Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Es sind **nur** Gruppenabgaben (2–3 Personen aus derselben Übungsgruppe) erlaubt. Falls Sie mehr als ein Blatt Papier abgegen, heften Sie bitte die Blätter zusammen.

Aufgabe 6.1 Länge und Skalarprodukt.

a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ das Parallelogrammgesetz gilt:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2 \cdot \|a\|^2 + 2 \cdot \|b\|^2 \,.$$

Interpretieren Sie diesen Satz geometrisch.

b) Zeigen Sie: ein Parallelogramm mit gleich langen Diagonalen ist stets ein Rechteck.

c) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ die Dreiecksungleichung gilt:

$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| \,.$$

Interpretieren Sie diese geometrisch. Wann tritt Gleichheit auf?

Aufgabe 6.2 Es sei $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ ein Dreieck mit Ecken

$$\mathit{0} = (0,0,0), \quad u = \tfrac{1+\sqrt{3}}{3}\,(1,2,2) \text{ und } v = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{2}{3} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

a) Bestimmen Sie die Seitenlängen des Dreiecks Δ.

b) Berechnen Sie die Eckwinkel von Δ (in Bogenmaß). Ist Δ rechtwinklig? (Wie kann man ohne Berechnung der Eckwinkel entscheiden, ob das Dreieck rechtwinklig ist?)

o) Skizzieren Sie das Dreieck!

c) Bestimmen Sie den Höhenvektor von v auf die gegenüberliegende Seite.

Berechnen Sie außerdem jeweils den Abstand zwischen jeder Ecke und der Geraden, die die gegenüberliegende Seite enthält.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von Δ.

e$^{\#}$) Bestimmen Sie den Höhenschnittpunkt von Δ.

Aufgabe 6.3 Für welche Werte des Parameters $r \in \mathbb{R}$ sind die Geraden G_1 durch Punkte $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$ und G_2 durch Punkte $\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\-1\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\r\end{smallmatrix}\right)$ parallel? Schneiden sich die beiden Geraden für $r = -3$?

Aufgabe 6.4 Parallele Ebenen.

a) Es seien im $\mathbb{R}^3$ drei Ebenen gegeben:

$$E_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - 3y + z = 1 \right\} \text{ sowie}$$

$$E_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\0\end{smallmatrix}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-2\end{smallmatrix}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\3\end{smallmatrix}\right) \text{ und } E_3 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\0\end{smallmatrix}\right).$$

Warum sind E_1, E_2 und E_3 parallele Ebenen? Sind welche davon gleich?

b) Es seien im $\mathbb{R}^3$ die Ebene E_1 durch die Punkte $(-1,2,1)$, $(0,2,-2)$ und $(0,3,-1)$ sowie die Ebene $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x+y+2z = -2\}$ gegeben. Sind diese Ebenen parallel?

Aufgabe# 6.5

a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ der Cosinussatz gilt:

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \cdot \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\angle(a,b).$$

b) Beweisen Sie, dass die Seiten eines Parallelogramms genau dann gleich lang sind, wenn die Diagonalen orthogonal sind.

Aufgabe# 6.6 Es seien die folgenden fünf Punkte im $\mathbb{R}_3$ gegeben:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Liegen die Punkte a, b, c auf einer Geraden? Falls nein, geben Sie eine Parameterdarstellung und eine Gleichung der Ebene E durch a, b, c an. Liegen auch die anderen beiden Punkte auf der Ebene E?

Aufgabe# 6.7 Es seien in $\mathbb{R}^3$ drei Geraden gegeben:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Welche Paare dieser Geraden sind parallel, windschief, schneiden sich? (Zwei Geraden in $\mathbb{R}^3$, die sich nicht schneiden, aber auch nicht parallel sind, heißen windschief.) Begründen Sie und geben Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt an!

Aufgabe# 6.8 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{array}\right..$$