Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Es sind **nur** Gruppenabgaben (2–3 Personen aus derselben Übungsgruppe) erlaubt. Falls Sie mehr als ein Blatt Papier abgegen, heften Sie bitte die Blätter zusammen.

Aufgabe 7.1 Determinanten

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$ sowie $\det A$, $\det B$, $\det(A \cdot B)$, $\det(B \cdot A)$. (Benutzen Sie die Aufgabe$^{\#}$ 7.8 nicht!)

b) Berechnen Sie die folgende Determinante in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & b & -1 \end{vmatrix}.$$

c) Beweisen Sie für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Aufgabe 7.2 Es seien im $\mathbb{R}^3$ die Ebene E_1 durch die Punkte $(1, -2, 1)$, $(2, -1, 2)$ und $(1, -2, 0)$ sowie die Ebene $E_2 = (0, 0, 1) + \mathbb{R} \cdot (1, 0, 0) + \mathbb{R} \cdot (1, 1, 0)$ gegeben.

a) Finden Sie eine Parameterdarstellung sowie eine Gleichung der Ebene E_1.

b) Sind die Ebenen E_1 und E_2 parallel? Bestimmen Sie den Durchschnitt $E_1 \cap E_2$.

c) Es sei $E_3 = \{ (x, y, z) \mid x + y - z = 0 \}$. Bestimmen Sie $E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

Aufgabe 7.3 Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Punkte a, b, c und p sowie die Gerade G_1:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; p = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner bezeichne E die Ebene durch a, b und c, und G_2 die Gerade durch a, die orthogonal zur Ebene E ist.

a) Geben Sie je drei von den vier Vektoren a, b, c, p an, die linear unabhägig bzw. linear abhängig sind.

Sind die vier Vektoren a, b, c, p linear unabhängig?

Liegen die Punkte a, b, c, p auf einer Ebene?

b) Berechnen Sie jeweils den Abstand zwischen p und G_1, p und E, G_1 und G_2.

c) Geben Sie eine Gleichung für E an und bestimmen Sie die Schnittmenge $E \cap G_1$. Was ist der Abstand zwischen G_1 und E?

Aufgabe 7.4 Beweisen Sie: Für drei verschiedene Punkte $p, a, b \in \mathbb{R}^3$ mit $b \neq 0$ gilt stets

$$\frac{1}{\|b\|} \|(p-a) \times b\| = \left\| p - a - \frac{\langle p-a, b \rangle}{\|b\|^2} b \right\|.$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie dazu das Dreieck mit den Ecken p, a und $a + b$.)

Aufgabe# 7.5 Determinanten

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot B$, $B \cdot A$ und A^2 sowie $\det A$, $\det B$, $\det(A \cdot B)$, $\det(B \cdot A)$ und $\det A^2$.

b) Berechnen Sie folgende Determinante in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & a+b & b \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe# 7.6 Es seien im $\mathbb{R}^3$ die Ebene E_1 durch die Punkte $(-1, 2, 1)$, $(0, 2, -2)$ und $(0, 3, -1)$ sowie die Ebene $E_2 = \{(x, y, z) \mid 3x + y + 2z + 2 = 0\}$ gegeben. Sind diese Ebenen parallel? Bestimmen Sie den Durchschnitt $E_1 \cap E_2$.

Aufgabe# 7.7 Es seien vier Punkte in $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$a = (0, 0, -2), \; b = (1, 1, 0), \; c = (1, -1, 0) \text{ und } d = (1, 0, 3).$$

a) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders mit den Ecken a, b, c, d (ein Sechstel des Spatvolumens!) und die Flächeninhalte seiner vier Seitenflächen!

b) Es sei G die Gerade durch b und c. Bestimmen Sie den Abstand zwischen a und G bzw. zwischen d und G.

c) Berechnen Sie den Abstand zwischen jedem der vier Ecken des Tetraeders und der Ebene, die die gegenüberliegenden Seite enthält. (zwischen jeden der vier Punkte und der Ebene durch den restlichen drei Punkten.)

d) Es sei G_1 die Gerade durch a und b, G_2 die Gerade durch c und d. Bestimmen Sie den Abstand zwischen G_1 und G_2.

Aufgabe# 7.8 Es seien A, B zwei 3×3 Matrizen. Zeigen Sie: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. (Hinweis: Es gilt $\det A = \langle a_1, a_2 \times a_3 \rangle$, wobei a_1, a_2, a_3 Spalten von A sind. Berechnen Sie also zuerst das Vektorprodukt der letzten beiden Spalten von $A \cdot B$ unter Beachtung der Rechenregeln fürs Vektorprodukt.)