Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2016 **Blatt 8**

AKAD. RÄTIN DR. CYNTHIA HOG-ANGELONI
DR. ANTON MALEVICH

Es sind **nur** Gruppenabgaben (2–3 Personen aus derselben Übungsgruppe) erlaubt. Falls Sie mehr als ein Blatt Papier abgegen, heften Sie bitte die Blätter zusammen.

Aufgabe 8.1

a) Es sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{-1} mittels

i) elementarer Zeilenumformungen.

ii) der adjunkten Matrix A^{ad}.

iii$^{\#}$) der Cramerschen Regel: Man findet die Spalte s_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, von A^{-1} als Lösung des Gleichungssystems $As_i = e_i$ (e_i sind die Standardbasisvektoren).

b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= \alpha \\ x_2 + x_3 &= \beta. \end{aligned}$$

Aufgabe 8.2 Es seien in $\mathbb{R}^3$ die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Beweisen Sie, dass $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Es sei $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Basis B.

c) Es sei $w \in \mathbb{R}^3$ gegeben, sodass $(1, 0, -1)$ die Koordinaten von w bezüglich B sind. Bestimmen Sie w.

d) Es sei $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$. Es sei $u \in \mathbb{R}^3$ gegeben, sodass $(1, 2, 1)$ die Koordinaten von u bezüglich C sind. Bestimmen Sie u sowie die Koordinaten von u bezüglich B. Bestimmen Sie außerdem die Koordinaten von v und w aus Teil b) bzw. c) bezüglich der Basis C.

Aufgabe 8.3 Es bezeichne $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und es sei $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$ mit

$$e_1 = \frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{3}b_3, \quad e_2 = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2, \quad e_3 = \frac{1}{6}b_1 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{3}b_3.$$

a) Finden Sie b_1, b_2 und b_3.

b) Es sei die lineare Abbildung A gegeben durch

$$A(b_1) = b_1 + 2b_3, \quad A(b_2) = 2b_1 + b_2 - b_3, \quad A(b_3) = b_2 + b_3.$$

Bestimmen Sie die Matrizen ${}_BA_B$ und A.

Aufgabe 8.4 Es sei eine Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben mit $\|A(v) - A(w)\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ und zusätzlich $A(0) = 0$. Zeigen Sie: A ist linear.

Aufgabe$^{\#}$ 8.5 Zeigen Sie für 3×3 Matrizen A, B: $\mathrm{Sp}(A \cdot B) = \mathrm{Sp}(B \cdot A)$.
(Die Spur $\mathrm{Sp}(A)$ einer Matrix A ist die Summe der Diagonaleinträge.)

Aufgabe$^{\#}$ 8.6 Berechnen Sie $t^2 x_2(t) + x_3(t)$, wobei $x_2(t)$ und $x_3(t)$ durch das folgende Gleichungssystem definiert sind:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ tx_2 + t^2 x_3 &= t^4 \\ t^2 x_1 + \ \ \ x_2 + \ tx_3 &= t^3 \\ tx_1 + t^2 x_2 + \ \ \ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe$^{\#}$ 8.7 Es seien in $\mathbb{R}^3$ die folgenden vier Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Wählen Sie drei dieser vier Vektoren, die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Berechnen Sie die Koordinaten aller vier Vektoren bezüglich Ihrer Basis aus Teil a).

Aufgabe$^{\#}$ 8.8 Es bezeichne $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Gibt es eine lineare Abbildung A mit

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = e_1, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e_2, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3?$$

Falls ja, bestimmen Sie die Matrix dieser Abbildung