Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2016 **Blatt 9**

Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Es sind **nur** Gruppenabgaben (2–3 Personen aus derselben Übungsgruppe) erlaubt. Falls Sie mehr als ein Blatt Papier abgegen, heften Sie bitte die Blätter zusammen.

Aufgabe 9.1 Es seien die Vektoren $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

a$^{\#}$) Finden Sie den Punkt $p \in \mathbb{R} \cdot w$ mit minimalem Abstand zu v. Finden Sie den Punkt v', der durch Spiegelung von v and der Geraden $\mathbb{R} \cdot w$ entsteht. Machen Sie hierzu eine Skizze!

b) Finden Sie eine Orthonormalbasis (b_1, b_2, b_3) von $\mathbb{R}_3$, so dass

b_1 parallel zu v ist,

b_2 in der Ebene durch den Ursprung und Punkte v, w liegt,

(b_1, b_2, b_3) negativ orientiert wird!

Wieviele Möglichkeiten gibt es insgesamt?

c) Es sei $E = \mathbb{R} \cdot u + \mathbb{R} \cdot w$ und A die Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an der Ebene E. Es sei ferner $C = (c_1, c_2, c_3)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ mit $c_2 = u$ und $c_3 = \frac{w}{\|w\|}$. Berechnen Sie die Matrizen ${}_CA_C$ und A.

Finden Sie nun den Punkt v'', der durch Spiegelung von v and der Ebene E entsteht.

Aufgabe 9.2 Es sei die Matrix A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Beweisen Sie, dass die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Matrix A orthogonal ist.

b) Es sei $v = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2}-2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $A(v)$. Zeigen Sie, dass A eine Drehspiegelung ist. Bestimmen Sie die Drehachse und Drehwinkel φ sowie die Spiegelungsebene. Leiten Sie her, dass A sogar eine Spiegelung ist.

c) Geben Sie eine Orthonormalbasis B an, sodass

$${}_BA_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.3 Es seien $z_1 = -\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} - \dfrac{3+\mathrm{i}}{4}$, $z_2 = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2} - \dfrac{6+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}^3}$.
Stellen Sie die Zahlen z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 + z_2}$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + \mathrm{i}b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, dar. Berechnen Sie zudem $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$, $|z_1 \cdot z_2|$ und $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Aufgabe 9.4 Zeigen Sie, dass alle komplexe Zahlen vom Betrag 1 und ungleich -1 als

$$\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

geschrieben werden können.

Stellen Sie konkret die Zahlen 1 und $\pm\mathrm{i}$ in dieser form dar!

Aufgabe# 9.5 Beweisen Sie für 2×2 und 3×3 Matrizen: $(AB)^T = B^T A^T$.

Aufgabe# 9.6 Schreiben Sie die adjunkte Matrix einer 3×3 Matrix A allgemein hin (korrigieren Sie dabei die Tippfehler im Skript) und rechnen Sie nach, dass $A^{\mathrm{ad}}A = (\det A)I$, wobei I die 3×3 Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe# 9.7 Es sei die Matrix A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Beweisen Sie, dass die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Matrix A orthogonal ist.

b) Es sei $v = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie $A(v)$. Zeigen Sie, dass A eine Drehung ist. Bestimmen Sie die Drehachse und Drehwinkel φ.

c) Geben Sie eine Orthonormalbasis B an, sodass

$${}_BA_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

ist, wobei φ der Drehwinkel ist.

Aufgabe# 9.8 Es seien $z_1 = -\dfrac{8}{1+\mathrm{i}} - \dfrac{6-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, $z_2 = \dfrac{4\mathrm{i}+2}{3\mathrm{i}} - \dfrac{1}{\mathrm{i}}$.
Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_1)$, $|z_1|$, $\mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$, $\mathrm{Re}(z_1+z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1+z_2)$, $|z_1+z_2|$, $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1 \cdot z_2)$, $|z_1 \cdot z_2|$ $\mathrm{Re}(\frac{z_1}{z_2})$, $\mathrm{Im}(\frac{z_1}{z_2})$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Aufgabe# 9.9 Beweisen Sie: hat die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$, mit $p, q \in \mathbb{C}$, reelle Lösungen, so ist $\mathrm{Im}(p) \cdot \mathrm{Im}(q) = 0$. Ist die Umkehrung auch wahr?