Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2016

Fragen zur Selbstkontrolle

Thema 0 Grundlagen (siehe auch Auffrischungskurs)

- Was ist eine Primzahl? Wie finde ich die Primfaktoren einer natürlichen Zahl? Wie bestimme ich den größten gemeinsamen Teiler und den kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier natürlichen Zahlen?

- Wie bestimmt man die Nullstellen eines Polynoms der Form $ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$? Unter welcher Voraussetzungen hat dieses Polynom keine bzw. eine bzw. zwei verschiedene reelle Nullstellen?

- Habe ich nicht vergessen, wie man Brüche addiert? Wie sieht es mit Summe zweier rationalen Funktionen (Quotient von Polynomen) aus?

- Was sind die binomische Formeln, der binomische Lehrsatz, Binomialkoeffizienten?

- Was sind π und e? Wie sind sie definiert, was ist ihr ungefährer Wert?

- Was sind die trigonometrischen Funktionen, wie sind sie definiert?
  Kenne ich die wichtigsten trigonometrischen Formeln: Grundformel, Additionstheoreme, Verdopplungsformeln, Phasenverschiebung?

- Wie hängen Winkelmaß und Bogenlänge eines Winkels zusammen?

- Was sind die Werte von sin, cos, tan von 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π?

- Wie würde ich ein lineares Gleichungssystem lösen? Kenne ich irgendwelche Tricks, die das Lösen einfacher machen?

- Wie ist das Skalarprodukt zweier Vektoren $x, y \in R^n$, $n = 2, 3$ definiert? Wie unterscheiden sich Skalarprodukt und skalare Multiplikation voneinander?

Thema 1 Aussagenlogik, Mengen
Grundlage: Vorlesungskript, Kapitel 1, Abschnitte 1.1 – 1.2

- Was ist eine Aussage? Kann ich einige Beispiele angeben?

- Was ist eine zusammengesetzte Aussage? Verstehe ich folgende logische Operatoren?

  $$\neg A,\ A \wedge B,\ A \vee B,\ A \Rightarrow B,\ A \Leftrightarrow B.$$

  Wie lassen sich die letzten beiden Operatoren mithilfe der ersten drei darstellen? Kann ich zu jedem dieser Operatoren eine Beispielaussage bilden und diese Negieren?

- Wie sieht die Negation einer Implikation bzw. einer Äquivalenz?

- Was ist eine Wahrheitstafel? Wozu dient sie?

- Was ist eine Tautologie? Wie zeigt man, dass eine Aussage eine Tautologie ist bzw. dass zwei Aussagen äquivalent sind?

- Welche Aussagen nennt man Sätze von de Morgan, Distributivsätze, modus ponens, modus tollens, modus barbara? Verstehe ich dessen Bedeutung?

- Verstehe ich folgende mengentheoretische Notationen?

$$\{\ldots : \ldots\},\ \in,\ \subset,\ \subsetneq,\ \bigcup_{i\in I} A_i,\ \bigcap_{i\in I} A_i,\ A\setminus B,\ A\times B,\ \mathcal{P}(A),\ A_1\times\ldots\times A_n.$$

- Was bedeutet es, dass zwei Mengen gleich sind? Wie beweist bzw. widerlegt man eine solche Aussage?
- Was sind Mengendiagramme (Venn-Diagramme) und wozu dienen sie? Reicht es, ein Mengendiagramm zu skizzieren, um Gleicheit zweier Mengen zu beweisen bzw. zu widerlegen?

Thema 2 Funktionen, Beweistypen: direkter, Widerspruchs- und Induktionsbeweis
Grundlage: Vorlesungskript, Kapitel 1, Abschnitte 1.2 – 1.3, Kapitel 2

- Was ist eine Relation zwischen zwei Mengen A und B? Was ist eine Relation auf der Menge A? Kann ich einige Beispiele nennen?
- Welche Relationen nennt man Funktionen oder Abbildungen? Was ist eine Funktionsvorschrift?
- Es seien X, Y Mengen, $M \subset X$ und $N \subset Y$ Teilmengen sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wie sind die Wertemenge (das Bild) $f(M)$ und das Urbild $f^{-1}(N)$ definiert?
- Was sind Definitionsmenge (Startmenge) und Zielmenge einer Abbildung? Ist es wichtig, diese immer anzugeben?
  Konkret: es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = x^3$. Handelt es sich bei f und g um dieselbe oder um verschiedene Funktionen?
- Was heißt es, dass eine Funktion injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv ist? Kann ich diese Eigenschaften auf unterschiedliche Weisen charakterisieren?
- Was versteht man unter Komposition (Verkettung) $f \circ g$ zweier Funktionen f und g? Welche Bedingungen müssen f und g erfühlen, damit $f \circ g$ wohldefiniert ist?
- Was ist ein Beweis? Was habe ich zu beachten, wenn ich eine Äquivalenz zwischen zwei Aussagen nachweisen soll?
- Was bedeutet es, eine Aussage zu widerlegen?
- Was versteht man unter einem Widerspruchsbeweis? Kann ich mindestens drei bekannte Widerspruchsbeweise nennen?
- Was ist das Prinzip der vollständigen Induktion? Kann man jede Aussage mit Induktion beweisen, und wenn nicht, dann welche? Was hat Induktion mit natürlichen Zahlen zu tun?
- Aus welchen drei Schritten besteht jeder Induktionsbeweis?
- Ist Induktionsanfang tatsächlich so wichtig? Kann man ihn nicht einfach weglassen?

Thema 3 Der Raum $\mathbb{R}^2$
Grundlage: Das Buch *Lineare Algebra* von de Jong, Kapitel 1

- Wie sind Addition und Multiplikation mit einem Skalar für Vektoren im $\mathbb{R}^2$ erklärt? Wie kann man Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und diese beiden Operationen geometrisch deuten?

- Wie definieren wir eine Basis von $\mathbb{R}^2$? Welches Paar von Vektoren wird Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ genannt?
- Es sei $c \in \mathbb{R}^2$ und (a, b) eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Was verstehen wir unter Koordinaten von c bezüglich der Basis (a, b)?
- Was ist die Determinante zweier Vektoren? Was ist der Zusammenhang zwischen Basis, Determinante und Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines linearen Gleichungssystems (Stichwort: Cramersche Regel)?
- Wie ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ definiert? Was nennt man einen Stützvektor, einen Richtungsvektor, einen Normalenvektor einer Geraden? Wie können Geraden alternativ beschrieben werden?
- Wie kommt man bei Geraden von einer Parametrisierung zu einer beschreibenden Gleichung (und umgekehrt, von einer Gleichung zu einer Parametrisierung)?
- Inwiefern führen Durchschnitte von Geraden im $\mathbb{R}^2$ zu linearen Gleichungssystemen?
- Wie überprüfe ich, ob drei Punkte auf einer Geraden liegen?
- Welche Abbildungen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ werden linear genannt? Geben Sie möglichst viele Beispiele linearer Abbildungen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
- Inwiefern hängen die linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit 2×2-Matrizen zusammen? Wie konstruiert man die Matrix einer linearen Abbildung?
- Welche Matrixoperation entspricht einer Komposition der linearen Abbildungen? Ist diese Verknüpfung kommutativ?
- Es sei (a, b) eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Welche Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird Parallelprojektion auf $\mathbb{R} \cdot a$ entlang b genannt? Ist sie linear? Wie berechnet man die Matrix einer Parallelprojektion auf $\mathbb{R} \cdot a$ entlang b?
- Welche Bedingung müssen die Einträge einer 2×2-Matrix A erfüllen, damit A invertierbar ist? Wie sieht die Inverse A^{-1} aus?
- Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist bereits durch ganz wenige Werte eindeutig bestimmt. Welche Teilmengen $B \subset \mathbb{R}^2$ legen A in diesem Sinne bereits eindeutig fest?
- Es seien B, C Basen von $\mathbb{R}^2$ und $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Was versteht man unter der Matrix ${}_BA_C$ von A bezüglich der Basen C und B? Wie berechnet man ${}_BA_C$ aus der Matrix A (d.h., aus der Matrix von A bezüglich der Standardbasis) und umgekehrt? Wie berechne ich ${}_CA_B$ aus ${}_BA_C$?
- Wie ist die Länge eines Vektors aus $\mathbb{R}^2$ definiert?
- Welche Abbildungen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ werden Bewegungen genannt? Welche zwei Typen von Bewegungen gibt es in $\mathbb{R}^2$?
- Wie ist der Winkel $\angle(a, b)$ zwischen zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ mithilfe von Drehungen erklärt?
- Wie wird mittels des Skalarprodukts die Länge eines Vektors bzw. Winkel zwischen zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ definiert? Wie wird die Orthogonalität zweier Vektoren übers Skalarprodukt festgestellt?

Thema 4 Der Raum $\mathbb{R}^3$

Grundlage: Das Buch *Lineare Algebra* von de Jong, Kapitel 2

- Wann nennt man zwei (drei, vier usw.) Vektoren linear abhängig?
- Wie wird mittels des Skalarprodukts die Länge eines Vektors bzw. Winkel zwischen zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ definiert? Wie wird die Orthogonalität zweier Vektoren übers Skalarprodukt festgestellt?
- Es seien $a, b \in \mathbb{R}^3$, beide ungleich Null. Was ist die Orthogonalprojektion von a auf b? Wie berechnet man den Lotfußpunkt p von a auf b (den Punkt auf $\mathbb{R} \cdot b$ mit minimalem Abstand zu a), das Lot (die Höhe) von a auf b?
- Wie kann man Geraden und Ebenen in $\mathbb{R}^3$ beschreiben?
- Was ist das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im $\mathbb{R}^3$? Warum ist das Vektorprodukt nützlich, um Ebenen im $\mathbb{R}^3$ zu beschreiben?
- Wie wird die lineare Abhängigkeit zweier Vektoren übers Vektorprodukt festgestellt?
- Was sind die Rechenregel für das Skalar- bzw. Vektorprodukt?
- Wie kommt man bei Ebenen von einer Parametrisierung zu einer beschreibenden Gleichung (und umgekehrt, von einer Gleichung zu einer Parametrisierung)?
- Unter welcher Bedingung an die Richtungsvektoren sind zwei Geraden parallel? Gibt es eine einfache Bedingung für die Parallelität zweier Ebenen in Parameterform bzw. Gleichungsform? Wann ist eine Gerade parallel zu einer Ebene?
- Wie berechnet man die Determinante von drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ bzw. von einer 3×3 Matrix? Was versteht man unter Entwicklung der Determinante nach einer Zeile bzw. Spalte? Was sind die Rechenregeln für die Determinante?
- Inwiefern führen Durchschnitte von Ebenen im $\mathbb{R}^3$ zu linearen Gleichungssystemen?
- Was sind die Möglichkeiten für die Schnittmenge zweier Ebenen in $\mathbb{R}^3$?
- Unter welcher Bedingung besteht die Schnittmenge dreier Ebenen in $\mathbb{R}^3$ aus einem einzigen Punkt? Wie übersetzt sich diese Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung eines linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen?
- Was versteht man unter den Abstand zwischen zweier Mengen in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$?
- Wie berechnet man den Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden, einem Punkt und einer Ebene, zweier windschiefen Geraden, einer Geraden und einer Ebene? Kann ich die Herleitung dieser Formeln nachvollziehen?
- Wie berechnet man die Fläche des von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms bzw. das Volumen des von drei Vektoren aufgespannten Parallelotops (Spats)? Wie ändern sich diese Formeln für das Dreieck bzw. das Tetraeder?
- Inwiefern hängen die linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit 3×3-Matrizen zusammen? Wie konstruiert man die Matrix einer linearen Abbildung?
- Welche Bedingung muss eine 3×3-Matrix A erfüllen, damit A invertierbar ist? Wie rechnet man die Inverse A^{-1} aus? Kann ich mindestens zwei Methoden nennen?

- Es seien B, C Basen von $\mathbb{R}^3$ und $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Was versteht man unter der Matrix ${}_BA_C$ von A bezüglich der Basen C und B? Wie berechnet man ${}_BA_C$ aus der Matrix A (d.h., aus der Matrix von A bezüglich der Standardbasis) und umgekehrt? Wie berechne ich ${}_CA_B$ aus ${}_BA_C$?
- Welche linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ werden Bewegungen oder orthogonalen Abbildungen genannt? Welche Typen von Bewegungen kenne ich?
- Es sei die lineare Abbildung A durch ihre Matrix gegeben. Wie erkenne ich, ob A orthogonal ist. Wie kann ich den Typ bei einer orthogonalen A bestimmen?
- Welche Basis heißt Orthonormal? Wie kann man Bewegungen mithilfe der Orthonormalbasen definieren und klassifiezieren?
- Was versteht man unter der Orientierung einer Basis? Was ist die Rechte-Hand-Regel?

Thema 5 Komplexe Zahlen
Grundlage: Vorlesungsskript, das Buch *Lineare Algebra* von de Jong, Abschnitte 3.2 – 3.4

- Was ist ein Körper? Welche Beispiele von Körpern kennen Sie?
- Wie ist die Zahl i definiert? Was ist eine komplexe Zahl?
- Wie addiert bzw. multipliziert man komplexe Zahlen? Welche Rechenregel gelten in $\mathbb{C}$? Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die multiplikative Inverse z^{-1} definiert? Wie berechnet man diese?
- Was sind Realteil, Imaginärteil, (Absolut)betrag, Argument, komplex konjugierte einer komplexen Zahl?
- Welcher Zusammenhang gibt es zwischen komplexen Zahlen und der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$? Was ist die Gausssche Zahlebene? Kann ich Addition bzw. Multiplikation zweier komplexen Zahlen geometrisch deuten?
- Kann ich folgende Mengen skizzieren?

  $$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}\,,\ \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1\}\,,\ \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 1\}\,,\ \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$
- Was versteht man unter Polardarstellung komplexer Zahlen? Inwiefern ist diese Darstellung nützlich?
- Was ist die De Moivresche Formel? Verstehe ich deren Beweis? Wie kann ich mithilfe dieser Formel komplexe Zahlen leicht potenziieren?
- Welche komplexe Zahlen werden n-te Einheitswurzeln genannt? Wie berechnet man die n-ten Wurzeln einer Zahl $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$? Wieviele gibts es?

Thema 6 Vektorräume
Grundlage: Das Buch *Lineare Algebra* von de Jong, Kapitel 4

- Wie ist ein K-Vektorraum definiert? (Was ist hier K?) Nennen Sie möglichst viele Beispiele von Vektorräumen.
- Welche Teilmengen eines Vektorraums heißen Unterräume? Wie testet man am einfachsten, ob eine Teilmenge ein Unterraum ist? Was sind die sogenannten triviale Unterräume eines Vektorraums?

- Es sei $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ein System von Vektoren in einem K-Vektorraum V. Was bedeutet es, dass S linear abhängig, linear unabhängig, ein Erzeugendensystem, eine Basis ist?
- Was ist die Dimension eines Vektorraumes?
- Kenne ich die wichtigen Basischarakterisierungssätze: Basisauswahlsatz, Steinitz'scher Austauschsatz, Basisergänzungssatz, etc.? Verstehen Sie deren Beweise?
- Wie berechnet man eine Basis aus einem Erzeugendensystem eines Unterraumes? Was ist die Zeilenstufenform einer Matrix?
- Was verstehen wir unter einer Koeffizientenmatrix bzw. einer erweiterten Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems? Inwiefern helfen sie die Lösungen des Gleichungssystems schneller bestimmen?
- Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Welche Abbildungen $A : V \to W$ heißen linear? Was ist ein Homomorphismus, ein Endomorphismus, ein Isomorphismus?
- Was sind Kern, Bild und Rang einer linearen Abbildung?
- Eine lineare Abbildung $A : V \to W$ ist bereits durch ganz wenige Werte eindeutig bestimmt. Welche Teilmengen $B \subset V$ legen A in diesem Sinne bereits eindeutig fest?
- Es seien B eine Basis von V, C eine Basis von W und $A : V \to W$ eine lineare Abbildung. Was versteht man unter der Matrix ${}_CA_B$ von A bezüglich der Basen B und C? Wie berechnet man ${}_CA_B$ aus der Matrix A (d.h., aus der Matrix von A bezüglich der Standardbasen von V und W) und umgekehrt? Wie sieht die Basiswechselformel im Allgemeinen aus?
- Welche Matrizen heißen invertierbar? Wie entscheidet man, ob eine Matrix invertierbar ist, bzw. berechnet man die Inverse am schnellsten?
- Es sei V ein Vektorraum und $U \leq V$. Was ist der Quotientenraum V/U? Verstehe ich, was dessen Elemente sind und wie die Verknüpfungen definiert sind?
- Es sei $U \leq V$ mit Basis B. Wie konstruiere ich eine Basis von V/U?
- Es sei $A : V \to V$ eine lineare Abbildung und $U = \operatorname{Ker} A$. Verstehe ich die Abbildungen $\overline{A} : V/U \to \operatorname{Bild} A$ mit $\overline{A} : v + U \mapsto A(v)$ sowie $\mathcal{A} : V/U \to V/U$ mit $v + U \mapsto A(v) + U$. Warum ist $\overline{A}$ ein Isomorphismus?

Thema 7 Determinanten

Grundlage: Das Buch *Lineare Algebra* von de Jong, Kapitel 5

- Wie ist die Determinante einer Matrix definiert? Welche Matrizen haben Determinanten?
- Für welche Matrizen ist die Determinante gleich 0?
- Wie kann man die Determinante mithilfe von Gauß-Algorithmus berechnen? Wie ändert sich die Determinante unter elemetaren Zeilenoperationen?
- Was ist eine Permutation auf n, was ist das Signum einer Permutation? Inwiefern können die Permutationen helfen, Determinante einer Matrix auszurechnen (Stichwort: Leibniz-Regel)?
- Was versteht man unter der Determinante einer linearen Abbildung? Warum ist diese wohldefiniert?