Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2016

Aufgabenpool

Woche 1 Aussagenlogik und Mengen

Aufgabe 1.2 Beweisen Sie die folgende Tautologien und logischen Äquivalenzen mithilfe einer Wahrheitstabelle.

e$^{\#}$) $\big[(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)\big] \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$,

Aufgabe$^{\#}$ 1.5 Die Aussage A sei "$5 > 9$", die Aussage B sei "Gerhard Schröder ist eine Frau". Vervollständigen Sie die folgende Wahrheitstabelle.

A	B	$A \wedge B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \wedge B \Rightarrow \neg B$	$\neg A \vee B \Leftrightarrow A$

Aufgabe$^{\#}$ 1.6 Wir bilden aus den Aussagen A, B, C, D (die falsch oder wahr sein können) folgende Prädikate:

a) $A \Rightarrow \neg A$,

b) $A \vee \neg A \Rightarrow A \wedge \neg A$,

c) $A \wedge \neg A \Rightarrow A \vee \neg A$,

d) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow A \vee \neg A$,

e) $A \wedge B \Rightarrow C \vee D$,

f) $A \vee (\neg A \wedge B) \Rightarrow \neg B$,

g) $[(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)] \Rightarrow (A \vee B)$,

h) $(A \vee B \Rightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)]$,

i) $[(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)]$.

Welche von diesen sind immer wahr bzw. immer falsch bzw. je nach Belegung von A, B, C, D wahr oder falsch?

Aufgabe$^{\#}$ 1.7 Für alle $n \geq 1$ sei $A_n = \left\{ \frac{a}{n} \,\middle|\, a \in \mathbb{N} \right\}$.
Bestimmen Sie

$$A_3, \quad \bigcap_{n \geq 1} A_n, \quad \bigcup_{n \geq 1} A_n, \quad A_n \cap A_m.$$

Aufgabe$^{\#}$ 1.8 Es seien A, B, C Mengen. Welche der Aussagen sind richting? (Beweisen Sie, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an! Machen Sie zu jedem Teil eine Skizze.)

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

e) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Woche 2 Funktionen, Beweistypen, Induktion

Aufgabe# 2.5 Gegeben sei die Abbildung

$$f : \{-2, 0, 1, 2, 3\} \to \{-16, -1, 0, 1, 4, 16, 81, 256\} \text{ durch } x \mapsto x^4$$

Bestimme folgende Mengen:
$f(\{0, 3\})$, $f(\{-2, 2\})$, $f^{-1}(\{-16, 0, 16\})$, $f^{-1}(\{-1, 4, 256\})$, $f^{-1}(\{-1, 1, 81\})$.

Aufgabe# 2.6 Welche der folgenden Relationen sind Funktionen von A nach B? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

(i) $A = B = \{2, 4, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(2, 2), (4, 4), (2, 6)\}$.

(ii) $A = B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = y^2 \right\}$.

(iii) $A = B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x^2 \right\}$.

Bestimmen Sie Definitionsmenge und Wertemenge der Funktionen.

Aufgabe# 2.7 Es sei $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$. die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{3}{5+x^2}$.

(i) Bestimmen Sie $f^{-1}\left(\left\{\frac{3}{5}\right\}\right)$ und $f^{-1}(B)$, wobei $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq \frac{1}{2} \right\}$.

(ii) Bestimmen Sie die Wertemenge $f(A)$.

(iii) Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv? (Begründen Sie!)

Aufgabe# 2.8 Es seien zwei Funktionen gegeben

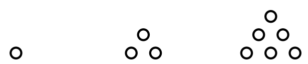
$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto 1 + x^2 & \quad x \mapsto (1, x^2). \end{array}$$

Bestimmen Sie, welche der Kompositionen existieren, und geben Sie für diese Kompositionen die Funktionsvorschrift explizit an:

$$f \circ g, \quad g \circ f, \quad f \circ f, \quad g \circ g.$$

Aufgabe# 2.9 Zeigen Sie: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Zeigen Sie allgemein für eine Primzahl p, dass $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. (*Hinweis:* Benutzen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.)

Aufgabe# 2.10 Dreieckszahlen



(i) Betrachten Sie die sogenannten Dreieckszahlen D_n: $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 6$, ...
Zeigen Sie, dass $D_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ ist.

(ii) Berechne 1^3, $1^3 + 2^3$, $1^3 + 2^3 + 3^3$, etc. Stellen Sie eine Vermutung über das Verhältnis zu den Zahlen D_n auf.

(iii) Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.

Aufgabe# 2.11 Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) $(x - 1) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^n - 1$, insbesondere $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Aufgabe# 2.12 Induktion

a) Zeigen Sie, dass $2n^3 + 4n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

b) In der Vorlesung wurde die folgende Formel bewiesen:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Können Sie aber, ohne diese Formel zu benutzen, zeigen, dass $n(n+1)(2n+1)$ tatsächlich für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist?

c) Ermitteln Sie die Anzahl d_n der Diagonalen (Verbindungsstrecken zwischen zwei Ecken, die keine Kanten sind) in einem ebenen n-Eck für $n \geq 4$. Beweisen Sie Ihre gefundene Formel.

Aufgabe# 2.13 Ermitteln Sie die Anzahl d_n der Diagonalen (Verbindungsstrecken zwischen zwei Ecken, die keine Kanten sind) in einem ebenen n-Eck für $n \geq 4$. Beweisen Sie Ihre gefundene Formel.

Aufgabe# 2.14 Sei A eine Menge. Beweisen Sie, dass es keine Surjektion von A nach $\mathcal{P}(A)$ gibt. (*Hinweis:* Sei $f : A \to \mathcal{P}(A)$ eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie, dass $\{a \in A \mid a \notin f(a)\} \notin f(A)$.)

Aufgabe# 2.15 Eine kleine Warnung zur vollständigen Induktion: manchmal muss man bei solchen Beweisen sehr genau hinschauen, sonst können sich Fehler einschleichen. Wir werden nun eine offensichtlich falsche Aussage mit vollständiger Induktion beweisen. Ihre Aufgabe ist, den Fehler im Beweis zu finden. Die Aussage lautet:

"Alle Studierenden an der Universität Mainz studieren das Gleiche."

Es sei $A(n)$ die Aussage

"In einer beliebigen Menge von n Studierenden studieren alle das Gleiche,"

die im Folgenden mit vollständiger Induktion bewiesen wird.

Beweis. Induktionssanfang: Sei $n = 1$. In einer beliebigen Menge, die nur einen Studenten oder eine Studentin enthält, ist die Aussage klar.

Induktionsschritt: Nehmen wir an, die Aussage sei für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Wir nehmen uns nun eine beliebige Menge M her, in der $n+1$ Studierende sind und wollen zeigen, dass die alle das Gleiche studieren. Geben wir den Elementen von M Namen:

$$M = \{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}.$$

Betrachten wir nun eine Teilmenge von M, in welcher der erste Studierende fehlt:

$$M' = \{a_2, a_3, ..., a_{n+1}\}.$$

M' enthält nur n Studierende und die studieren nach Induktionsvoraussetzung alle das Gleiche. Fehlt noch a_1, aber zu diesem Zweck betrachten wir eine zweite Teilmenge:

$$M'' = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Auch in dieser Menge sind nur n Studierende enthalten, die wieder nach Induktionsvoraussetzung alle das Gleiche studieren. Nehmen wir uns nun ein beliebiges Element a_k aus dem Schnitt (also ein a_k aus der Menge $\{a_2, ..., a_n\}$), so folgt, dass a_1 das Gleiche studiert wie a_k und a_k das Gleiche wie a_{n+1}, denn a_1 und a_k liegen in M'' und a_k und a_{n+1} liegen in M'. Damit ist die Aussage bewiesen und alle Studierenden aus M studieren das Gleiche.

Woche 3 $\mathbb{R}^2$: Basis, Determinante, Geraden, lineare Abbildungen

Aufgabe 3.3 Kollineare Punkte.

d$^{\#}$) Prüfen Sie, ob $(1, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 0)$ und $(4, 4)$ auf einer Geraden liegen.

Aufgabe$^{\#}$ 3.4 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mithilfe der Cramerschen Regel.

a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 5y = 10 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta \end{cases}$.

Aufgabe$^{\#}$ 3.5 Hat das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x - y = c_1 \\ x + y = c_2, \end{cases}$$

für alle $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung?

Aufgabe$^{\#}$ 3.6 Es sei $a = (-1, 3)$, $b = (2, 1)$.

a) Zeigen Sie, dass (a, b) eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Berechnen Sie die Koordinaten von $(-1, 1)$, $(1, 4)$, $(-3, 2)$ und $(0, 7)$ bezüglich der Basis (a, b).

Aufgabe$^{\#}$ 3.7

a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass (a, b) genau dann keine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $b = \lambda a$ oder $a = \lambda b$ (solche a und b heißen parallel).

b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $a + \mathbb{R}b$ genau dann eine Gerade durch $(0, 0)$ ist, wenn $\det(a, b) = 0$ ist.

c) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. Finden Sie ein Kriterium dafür, dass c auf der Geraden $a + \mathbb{R}b$ liegt.

Aufgabe$^{\#}$ 3.8 Für eine Basis (a, b) von $\mathbb{R}^2$ nennt man die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $A(xa + yb) = xa$ die Parallelprojektion auf $\mathbb{R}a$ entlang b,

a) Finden Sie die koordinaten der Vektoren $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ bezüglich der Basis $\big((1, 1), (-1, 1)\big)$.

b) Bestimmen Sie die Matrix der Parallelprojektion A auf $\mathbb{R}(1, 1)$ entlang $(-1, 1)$.

c) Bestimmen Sie die Matrix der Parallelprojektion auf $\mathbb{R}(1, 0)$ entlang $(0, 1)$.

Aufgabe$^{\#}$ 3.9 Es sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine nicht injektive lineare Abbildung, die aber keine Nullabbildung ist. Beweisen Sie:

a) $\operatorname{Ker} A := \big\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; A(x_1, x_2) = (0, 0) \big\}$ ist eine Gerade durch $(0, 0)$.

b) Das Bild $A(\mathbb{R}^2)$ ist ebenfalls eine Gerade durch $(0, 0)$.

Woche 4 $\mathbb{R}^2$: Inverse Matrix, Basiswechsel, Länge

Aufgabe# 4.5 Es seien $a = (1, -2)$, $b = (1, 3)$, $B = (a, b)$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass B eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Berechnen Sie die Koordinaten von $(1, 0)$ und $(0, 1)$ bezüglich der Basis B.

c) Berechnen Sie ${}_BA_E$, ${}_EA_B$ und ${}_BA_B$, wobei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

d) Es sei $C = \big((0, -1), (-1, 1)\big)$ eine weitere Basis. Berechnen Sie ${}_CA_B$ sowie ${}_BA_C$.

Aufgabe# 4.6 Es seien $a = (-1, 1)$, $b = (2, -1)$, $B = (a, b)$ und $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie ${}_BA_B$.

Aufgabe# 4.7 Berechnen Sie die Inversen (falls sie existieren!) folgender Matrizen.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe# 4.8 Es seien ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $\|C - B\| = a$, $\|C - A\| = b$, $\|B - A\| = c$ und ℓ eine Gerade durch A und B. Es sei D der Fußpunkt von C auf ℓ. Es seien ferner $p = \|D - B\|$, $q = \|D - A\|$ und $h = \|D - C\|$. Nehmen Sie an, dass $C - A \perp C - B$.

a) Zeigen Sie, dass $h^2 = pq$.

b) Beweisen Sie, dass $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$.

Bemerkung: Für eine Gerade ℓ und einen Punkt C mit $C \notin \ell$ existiert genau ein Punkt $D \in \ell$, sodass $C - D$ ein Normalenvektor von ℓ ist. Den Punkt D nennen wir den Fußpunkt von C auf ℓ.

Woche 5 $\mathbb{R}^2$: Bewegungen, Skalarprodukt, Orthogonalprojektion, Winkel

Aufgabe 5.4 Es sei der Dreieck mit Ecken $\mathit{0} = (0, 0)$, $u = (2, 2)$, $v = (3, 0)$ gegeben.

d#) Bestimmen Sie Gleichungen der Seitenhalbierenden und Parameterdarstellungen der Mittelsenkrechten des Dreiecks.

e#) Bestimmen Sie eine Gleichung und eine Parameterdarstellung der Winkelhalbierenden von u.

Woche 6 $\mathbb{R}^3$: Skalarprodukt, Länge, Lagebeziehung von Geraden, Gleichung und Parameterdarstellung einer Ebene

Aufgabe 6.2 Es sei $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ ein Dreieck mit Ecken

$$\mathit{0} = (0, 0, 0), \quad u = \tfrac{1+\sqrt{3}}{3}\,(1, 2, 2) \text{ und } v = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{2}{3} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

e#) Bestimmen Sie den Höhenschnittpunkt von Δ.

Aufgabe# 6.5

a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ der Cosinussatz gilt:

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \cdot \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\angle(a,b).$$

b) Beweisen Sie, dass die Seiten eines Parallelogramms genau dann gleich lang sind, wenn die Diagonalen orthogonal sind.

Aufgabe# 6.6 Es seien die folgenden fünf Punkte im $\mathbb{R}_3$ gegeben:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Liegen die Punkte a, b, c auf einer Geraden? Falls nein, geben Sie eine Parameterdarstellung und eine Gleichung der Ebene E durch a, b, c an. Liegen auch die anderen beiden Punkte auf der Ebene E?

Aufgabe# 6.7 Es seien in $\mathbb{R}^3$ drei Geraden gegeben:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Welche Paare dieser Geraden sind parallel, windschief, schneiden sich? (Zwei Geraden in $\mathbb{R}^3$, die sich nicht schneiden, aber auch nicht parallel sind, heißen windschief.) Begründen Sie und geben Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt an!

Aufgabe# 6.8 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -3 \end{aligned}\right., \quad \left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}\right., \quad \left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}\right..$$

Woche 7 $\mathbb{R}^3$: Determinanten, Schnittmengen, Abstände

Aufgabe# 7.5 Determinanten

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot B$, $B \cdot A$ und A^2 sowie $\det A$, $\det B$, $\det(A \cdot B)$, $\det(B \cdot A)$ und $\det A^2$.

b) Berechnen Sie folgende Determinante in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & a+b & b \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe# 7.6 Es seien im $\mathbb{R}^3$ die Ebene E_1 durch die Punkte $(-1, 2, 1)$, $(0, 2, -2)$ und $(0, 3, -1)$ sowie die Ebene $E_2 = \{(x, y, z) \mid 3x + y + 2z + 2 = 0\}$ gegeben. Sind diese Ebenen parallel? Bestimmen Sie den Durchschnitt $E_1 \cap E_2$.

Aufgabe$^{\#}$ **7.7** Es seien vier Punkte in $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$a = (0, 0, -2),\ b = (1, 1, 0),\ c = (1, -1, 0) \text{ und } d = (1, 0, 3).$$

a) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders mit den Ecken a, b, c, d (ein Sechstel des Spatvolumens!) und die Flächeninhalte seiner vier Seitenflächen!

b) Es sei G die Gerade durch b und c. Bestimmen Sie den Abstand zwischen a und G bzw. zwischen d und G.

c) Berechnen Sie den Abstand zwischen jedem der vier Ecken des Tetraeders und der Ebene, die die gegenüberliegenden Seite enthält. (zwischen jeden der vier Punkte und der Ebene durch den restlichen drei Punkten.)

d) Es sei G_1 die Gerade durch a und b, G_2 die Gerade durch c und d. Bestimmen Sie den Abstand zwischen G_1 und G_2.

Aufgabe$^{\#}$ **7.8** Es seien A, B zwei 3×3 Matrizen. Zeigen Sie: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. (Hinweis: Es gilt $\det A = \langle a_1, a_2 \times a_3 \rangle$, wobei a_1, a_2, a_3 Spalten von A sind. Berechnen Sie also zuerst das Vektorprodukt der letzten beiden Spalten von $A \cdot B$ unter Beachtung der Rechenregeln fürs Vektorprodukt.)

Woche 8 $\mathbb{R}^3$: Lineare Abbildungen, Cramersche Regel, inverse Matrix, Basiswechsel

Aufgabe 8.1

a) Es sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{-1} mittels

iii$^{\#}$) der Cramerschen Regel: Man findet die Spalte s_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, von A^{-1} als Lösung des Gleichungssystems $As_i = e_i$ (e_i sind die Standardbasisvektoren).

Aufgabe$^{\#}$ **8.5** Zeigen Sie für 3×3 Matrizen A, B: $\mathrm{Sp}(A \cdot B) = \mathrm{Sp}(B \cdot A)$.
(Die Spur $\mathrm{Sp}(A)$ einer Matrix A ist die Summe der Diagonaleinträge.)

Aufgabe$^{\#}$ **8.6** Berechnen Sie $t^2 x_2(t) + x_3(t)$, wobei $x_2(t)$ und $x_3(t)$ durch das folgende Gleichungssystem definiert sind:

$$\begin{aligned} x_1 + \ tx_2 + t^2 x_3 &= t^4 \\ t^2 x_1 + \ \ x_2 + \ tx_3 &= t^3 \\ tx_1 + t^2 x_2 + \ \ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe$^{\#}$ **8.7** Es seien in $\mathbb{R}^3$ die folgenden vier Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Wählen Sie drei dieser vier Vektoren, die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Berechnen Sie die Koordinaten aller vier Vektoren bezüglich Ihrer Basis aus Teil a).

Aufgabe$^{\#}$ **8.8** Es bezeichne $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Gibt es eine lineare Abbildung A mit

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = e_1, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e_2, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3?$$

Falls ja, bestimmen Sie die Matrix dieser Abbildung

Woche 9 $\mathbb{R}^3$: Bewegungen, Orientierung. Komplexe Zahlen

Aufgabe 9.1 Es seien die Vektoren $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

a#) Finden Sie den Punkt $p \in \mathbb{R} \cdot w$ mit minimalem Abstand zu v. Finden Sie den Punkt v', der durch Spiegelung von v and der Geraden $\mathbb{R} \cdot w$ entsteht. Machen Sie hierzu eine Skizze!

Aufgabe# 9.5 Beweisen Sie für 2×2 und 3×3 Matrizen: $(AB)^T = B^T A^T$.

Aufgabe# 9.6 Schreiben Sie die adjunkte Matrix einer 3×3 Matrix A allgemein hin (korrigieren Sie dabei die Tippfehler im Skript) und rechnen Sie nach, dass $A^{\mathrm{ad}} A = (\det A) I$, wobei I die 3×3 Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe# 9.7 Es sei die Matrix A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Beweisen Sie, dass die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Matrix A orthogonal ist.

b) Es sei $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $A(v)$. Zeigen Sie, dass A eine Drehung ist. Bestimmen Sie die Drehachse und Drehwinkel φ.

c) Geben Sie eine Orthonormalbasis B an, sodass

$$_B A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

ist, wobei φ der Drehwinkel ist.

Aufgabe# 9.8 Es seien $z_1 = -\dfrac{8}{1+\mathrm{i}} - \dfrac{6-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, $z_2 = \dfrac{4\mathrm{i}+2}{3\mathrm{i}} - \dfrac{1}{\mathrm{i}}$.
Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_1)$, $|z_1|$, $\mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$, $\mathrm{Re}(z_1+z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1+z_2)$, $|z_1+z_2|$, $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1 \cdot z_2)$, $|z_1 \cdot z_2|$, $\mathrm{Re}(\frac{z_1}{z_2})$, $\mathrm{Im}(\frac{z_1}{z_2})$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Aufgabe# 9.9 Beweisen Sie: hat die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$, mit $p, q \in \mathbb{C}$, reelle Lösungen, so ist $\mathrm{Im}(p) \cdot \mathrm{Im}(q) = 0$. Ist die Umkehrung auch wahr?

Woche 10 Komplexe Zahlen. Vektorräume und Unterräume

Aufgabe# 10.5 Skizzieren Sie die Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$, wobei

a) $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| \le 1\}$ und $B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \le 1\}$,

b) $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+\mathrm{i}| \le 2\}$ und $B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)| \le 1\}$,

c) $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-\mathrm{i}| \le 1\}$ und $B = \left\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)|^2 \le 1\right\}$.

Aufgabe# 10.6 Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

Aufgabe# 10.7 Es seien $w_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, $w_2 = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$

a) Bestimmen Sie die Polardarstellung von w_1 bzw. w_2.

b) Lösen Sie die beiden Gleichungen $z^5 = w_1$ bzw. $z^5 = w_2$ nach z.

Aufgabe# 10.8 Es sei V ein K-Vektorraum, $v, w, x \in V$, $\lambda \in K$. Ferner bezeichnen wir mit $\mathbf{0}$ den Nullvektor ($\mathbf{0} \in V$) und mit 0 die Zahl Null ($0 \in K$).
Leiten Sie die foglenden Aussagen aus den Vektorraumaxiomen her.

a) Aus $v + x = v$ folgt stets $x = \mathbf{0}$.

b) Ist $x + v = x + w$, so folgt $v = w$.

c) $0 \cdot v = \mathbf{0}$ und $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

d) Aus $\lambda \cdot x = \mathbf{0}$ folgt entweder $\lambda = 0$ oder $x = \mathbf{0}$.

e) $(-1) \cdot v = -v$.

Aufgabe# 10.9 Es bezeichne $\mathrm{Abb}(A, \mathbb{R})$ die Menge aller Abbildungen $f : A \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(A, \mathbb{R})$ mit Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und Skalarmultiplikation $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ für $f, g \in \mathrm{Abb}(A, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in A$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

b) Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Unterräume von V sind:

$$U = \{ f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \text{ und}$$
$$W = \{ g \in V \mid g(x) = -g(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} .$$

Zeigen Sie ferner: $U \cap W = \{0\}$.

c) Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. (Die Elemente von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ nennt man auch Folgen.) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen U Unterräume von V sind.

(i) $U = \left\{ a \in V \mid \lim\limits_{n\to\infty} a = 0 \right\}$.

(ii) $U = \{ a \in V \mid \text{es gibt ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } a(n) = 0 \text{ für alle } n \geq N\}$.

Aufgabe# 10.10 Es sei $V = \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Beweisen Sie:

a) Jede Gerade durch den Ursprung ist ein Unterraum von V.

b) Eine Gerade, die nicht den Ursprung enthält, ist kein Unterraum von V.

Aufgabe# 10.11 Warum sind die folgenden Mengen U Unterräume von V? Geben Sie eine Basis von U an und bestimmen Sie $\dim U$. Ergänzen Sie dann die Basis von U zu einer Basis von V.

c) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \left\langle \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right), \left(-2, 0, 1\right), \left(1, 1, -1\right), \left(0, -1, \frac{1}{2}\right) \right\rangle$.

b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{ (a, a - b, a - c, b + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe$^{\#}$ 10.12 Es sei $M = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, wobei

$$v_1 = \bigl(1,2,0\bigr)\,, \quad v_2 = \bigl(0,1,3\bigr)\,, \quad v_3 = \bigl(1,0,0\bigr)\,, \quad v_4 = \bigl(1,1,1\bigr) \ \in \mathbb{R}^3\,.$$

a) Zeigen Sie: M ist linear abhängig.

b) Beweisen Sie, dass M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist. Wählen Sie dazu drei Vektoren von M aus, die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe$^{\#}$ 10.13 Schnitt und Summe der Unterräume.

a) Zeigen Sie, dass

$$U = \bigl\{\,(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \bigm| (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (x_5,x_4,x_3,x_2,x_1)\bigr\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^5$ ist.

b) Berechnen Sie den Durchschnitt $U \cap V$ von U und dem Erzeugnis

$$V = \bigl\langle (1,1,1,0,0), (2,2,1,0,0)\bigr\rangle$$

und geben Sie eine Basis B von $U \cap V$ an.

c) Bestimmen Sie Basen C von U und D von V, die B enthalten.

d) Wenn Sie die im Teil c) konstruierten Basen zusammenstellen, erhalten Sie eine Basis $C \cup D$ von $U + V$. Zeigen Sie dies.

Woche 11 Lineare Gleichungssysteme. Lineare Abbildungen, Bild und Kern. Matrizen.

Aufgabe$^{\#}$ 11.5 a) Entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ über $\mathbb{R}$ lösbar ist, indem Sie die Matrix $(A|b)$ in Zeilenstufenform bringen. Geben Sie die Lösungsmenge an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 8 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

c) Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \\ 6 & -3 & 7 & 8 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe# 11.6 a) Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte von je zwei dieser Matrizen.

b) Welcher Zusammenhang besteht generell für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwischen $(A^T)^m$ und $(A^m)^T$? Berechnen Sie für die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ die Matrizen A^5 und $\left(A^T\right)^5$ mit so wenig Rechenaufwand wie möglich!

Aufgabe# 11.7 Es seien $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$f(e_1) = (1, 3), \quad f(e_2) = (2, 0), \quad f(e_3) = (2, 1).$$

Bestimmen Sie $\operatorname{Ker} f$ und $\operatorname{Bild} f$.

Aufgabe# 11.8 Bestimmen Sie jeweils den Rang von A, A^2 und A^3 sowie von B, B^2 und B^3, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Aufgabe# 11.9 Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrizen, indem Sie diese auf Zeilenstufenform bringen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -4 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Woche 12 Basiswechsel. Quotientenräume. Determinante.

Aufgabe# 12.5 Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$ mit Basen $S = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ bzw. $T = \{(0,1), (1,1)\}$. Es sei ferner $A : V \to W$ die lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix

$${}_TA_S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von A bezüglich der Standardbasen von V und W sowie $\operatorname{Ker} A$ und $\operatorname{Bild} A$.

Aufgabe# 12.6 Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

sowie

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & b & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & a+b & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe# 12.7 Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Aufgabe# 12.8 Es sei K ein Körper und es seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$.
Beweisen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & X + a_{n-1} \end{pmatrix} = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

mittels

a) Laplace-Entwicklung (d.h. nach Definition),
b) elementarer Zeilenumformungen,
c) Leibniz-Formel.

Aufgabe# 12.9 Es seien

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 1 & 10 & 8 & 3 & 4 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 9 & 7 & 5 & 6 & 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Permutationen aus S_{10}.

a) Schreiben Sie σ_1, σ_2 und σ_3 in Zykelschreibweise als Produkt von elementfremden Zykeln.

b) Bestimmen Sie die Zykelschreibweisen von $\sigma_2 \circ \sigma_3$, $\sigma_3 \circ \sigma_2$, $(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$, $\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$, $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_3^{-1}$, $(\sigma_2 \circ \sigma_3)^{-1}$ und $(\sigma_3 \circ \sigma_2)^{-1}$.

Aufgabe# 12.10

a) Schreiben Sie $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ als Produkt von Transpositionen und bestimmen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma_1)$ und $\operatorname{sgn}(\sigma_2)$, wobei

$$\sigma_1 = (1\ 2\ \cdots\ n-1\ n), \quad \sigma_2 = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_\ell).$$

b) Es habe $\sigma \in S_n$ in Zykelschreibweise als Produkt von elementfremden Zykeln genau k Zykel der Längen $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$.
Beweisen Sie: $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{(\ell_1 - 1) + (\ell_2 - 1) + \ldots + (\ell_k - 1)}$.

c) Bestimmen Sie das Signum von

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 11 & 6 & 9 & 8 & 7 & 10 & 12 \end{pmatrix} \in S_{12}.$$

Aufgabe$^{\#}$ 12.11 Wir definieren für ein $\sigma \in S_n$ die Zahl $k(\sigma)$ als

$$k(\sigma) = \left| \{ (i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n,\ \sigma(i) > \sigma(j) \} \right|.$$

Beweisen Sie: $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{k(\sigma)}$.