Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 10, SS19

A. Nikoubashman, F. Berressem und Assistenten Abgabe 05.07.19, 14:00

Wichtig: Vermerken Sie auf dem Deckblatt Ihrer Lösung Ihren Namen, Matrikelnummer, Gruppennummer und optional eine ungefähre Bearbeitungszeit.

Legen Sie sämtliche Berechnungen begründet und nachvollziehbar dar. Nur eine Angabe des Ergebnisses ist außer in trivialen Fällen nicht ausreichend.

Aufgabe 1: Integration (*6 Punkte*)

Bestimmen Sie folgende bestimmte Integrale bzw. Stammfunktionen

(a) (2 Punkte) $\int_1^3 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,\mathrm{d}x$

(b) (2 Punkte) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\sin^2(x^2)\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$

(c) (2 Punkte) $\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 2: Mehrdimensionale Integrale (*4 Punkte*)

Gegeben sei ein Gebiet $G = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 4\}$ sowie die Funktion $f(x,y)=x^2+y^2$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

Nutzen Sie hierfür Polarkoordinaten.

Aufgabe 3: Eigenschaften von Integralen (*5 Punkte*)

Es seien $I_1=[a,b]$ und $I_2=[b,c]$ zwei Intervalle, mit $a,b,c\in\mathbb{R}$, sowie f und g zwei Funktionen mit $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Weiterhin seien $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Zeigen Sie mithilfe der Darstellung als Riemann-Summen die folgenden Eigenschaften von Integralen:

(a) (1 Punkt) Die Linearität:

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(b) (1 Punkt) Die oberen und unteren Grenzen:

$$\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq\max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}(b-a)$$

(c) (1 Punkt) Die Additivität der Intervalle:

$$\int\limits_{I_1 \cup I_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{I_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{I_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{d.h.} \quad \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

(d) (2 Punkte) Die Umkehrung der Intervallgrenzen:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 4: Erwartungswerte und Varianzen (*5 Punkte*)

Es sei $x \in \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, die nach einer gegebenen Verteilung $P[x]$ verteilt ist. Weiterhin seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Erwartungswert $E[x]$ und die Varianz $V[x]$ der folgenden Verteilungen:

(a) (2 Punkte)

$$P_1[x] = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{für } 1 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) (3 Punkte)

$$P_2[x] = \begin{cases} \frac{x}{12} + \frac{1}{3} & \text{für } -4 \leq x \leq 0 \\ -\frac{x}{6} + \frac{1}{3} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis: Der Erwartungswert ist definiert als:

$$E[x] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x P[x]\,\mathrm{d}x$$

und die Varianz als:

$$\begin{aligned} V[x] &= E[(x - E[x])^2] \\ &= E[x^2] - (E[x])^2 \end{aligned}$$