



Wichtig: Vermerken Sie auf dem Deckblatt Ihrer Lösung Ihren Namen, Matrikelnummer, Gruppennummer und optional eine ungefähre Bearbeitungszeit.

Legen Sie sämtliche Berechnungen begründet und nachvollziehbar dar. Nur eine Angabe des Ergebnisses ist außer in trivialen Fällen nicht ausreichend.

Aufgabe 1: Kreuz- und Skalarprodukt

(6 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} h-1 \\ 2-2h \\ 1+2h \end{pmatrix}$$

mit $h \in \mathbb{R}$.

- (a) Berechnen Sie den normierten Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ so, dass er senkrecht auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ steht und $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ein Rechtssystem bildet (“Rechte-Hand-Regel”).
- (b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ mit Hilfe des Skalarproduktes.

Aufgabe 2: Eigenschaften des Kreuzproduktes

(14 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, sowie die Skalare $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols ϵ_{ijk} oder durch explizites Ausrechnen die folgenden Eigenschaften:

- (a) Die Antikommutativität des Kreuzproduktes

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

- (b) Die Bilinearität des Kreuzproduktes

$$(\lambda \mathbf{a} + \gamma \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \gamma \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

und

$$\mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \gamma \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

- (c) Die Graßmann-Identität (“BAC-CAB-Regel”)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

- (d) Die Jacobi-Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

(e) Berechnen Sie das Volumen des Spates, der von den Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.