Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 3, SS19

A. Nikoubashman, F. Berressem und Assistenten Abgabe 17.05.19, 14:00

Wichtig: Vermerken Sie auf dem Deckblatt Ihrer Lösung Ihren Namen, Matrikelnummer, Gruppennummer und optional eine ungefähre Bearbeitungszeit.

Legen Sie sämtliche Berechnungen begründet und nachvollziehbar dar. Nur eine Angabe des Ergebnisses ist außer in trivialen Fällen nicht ausreichend.

Aufgabe 1: Lineare Unabhängigkeit (*12 Punkte*)

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4\sqrt{2}}{5} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Winkel zwischen allen Paaren von Vektoren.

(b) Prüfen Sie, ob die Vektoren der Tripel ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$) und ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$) linear unabhängig sind.

(c) Berechnen Sie die Spatprodukte

$$S_1 = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad S_2 = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d})$$

(d) Modifizieren Sie gegebenenfalls die Vektoren $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ derart, dass die entsprechenden Tripel ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$') bzw. ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$') aus linear unabhängigen Vektoren bestehen und zeigen Sie anschließend die lineare Unabhängigkeit.

Aufgabe 2: Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren (*8 Punkte*)

Sei $V \in k^n$ ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper k, beispielsweise $k = \mathbb{R}$. Weiterhin bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt.
Für eine Basis $B = (\mathbf{b}_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ des n-dimensionalen Vektorraumes ist es ausreichend, aus n linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{b}_i$ zu bestehen, das heißt die Vektoren $\mathbf{b}_i$ müssen nicht notwendigerweise orthogonal zueinander sein (siehe z.B. ein triklines Koordinatensystem).
Das *Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren* ist ein Verfahren, um aus einer Basis $B = (\mathbf{w}_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ aus nicht-orthogonalen Vektoren eine Basis $B' = (\mathbf{v}_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ zu erzeugen, deren Vektoren orthogonal zueinander sind. Das Verfahren funktioniert wie folgt:

- Wählen Sie als ersten Vektor der neuen Basis $\mathbf{v}_1$ den ersten Vektor der alten Basis $\mathbf{w}_1$:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$$

- Bestimmen Sie sukzessive alle folgenden Vektoren der neuen Basis nach der Formel:

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{w}_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_m \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} \mathbf{v}_i$$

Die prinzipielle Idee des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens besteht darin, bei der Erzeugung der Vektoren der neuen Basis stets die Projektion des entsprechenden Vektors der alten Basis auf die vorherigen Vektoren der neuen Basis abzuziehen. Die Projektion des m-ten Vektors der alten Basis auf den i-ten der neuen Basis ist dabei gegeben durch

$$\mathcal{P}_{\mathbf{v}_i}(\mathbf{w}_m) = \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_m \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} \mathbf{v}_i$$

(a) Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Finden Sie einen Vektor $\mathbf{c}$, der orthogonal zu $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist. Bildet das Tripel $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ein Orthogonalsystem? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Gegeben sei eine Basis B bestehend aus den Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Orthogonalisieren Sie die Basis B nach dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren.