

**Wichtig:** Vermerken Sie auf dem Deckblatt Ihrer Lösung Ihren Namen, Matrikelnummer, Gruppennummer und optional eine ungefähre Bearbeitungszeit.

Legen Sie sämtliche Berechnungen begründet und nachvollziehbar dar. Nur eine Angabe des Ergebnisses ist außer in trivialen Fällen nicht ausreichend.

## Aufgabe 1: Drehmatrizen und andere Transformationen (12 Punkte)

Drehungen von Vektoren im Raum lassen sich durch Drehmatrizen ausführen. Die Drehung eines Vektors  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  entlang der z-Achse um den Winkel  $\phi \in [0, 2\pi)$  wird durch  $\mathbf{x}' = \mathbf{D}(\phi) \cdot \mathbf{x}$  berechnet. Hierbei ist

$$\mathbf{D}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die zugehörige Drehmatrix, mit  $\mathbf{D} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

- (a) Gegeben seien die Vektoren  $\mathbf{a} = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$  und  $\mathbf{b} = (2, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$ . Berechnen Sie die um  $\phi = \frac{\pi}{2}$  gedrehten Vektoren  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}'$ . Prüfen Sie, ob  $\mathbf{a} \perp \mathbf{a}'$  bzw.  $\mathbf{b} \perp \mathbf{b}'$ .
- (b) Zeigen Sie, dass für einen Vektor  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0)$  in der x-y-Ebene allgemein gilt, dass

$$(\mathbf{D}(\pi/2) \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0.$$

- (c) Zeigen Sie, dass zwei hintereinander ausgeführte Drehungen um die Winkel  $\phi$  und  $\psi$  das gleiche Ergebnis liefern, wie eine einzelne Drehung um den Winkel  $\phi + \psi$ .

*Tipp: Zur Lösung können Sie passende Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen verwenden.*

- (d) Welche Matrix  $\mathbf{D}'(\phi)$  ist die Umkehrtransformation (Linksinverse) von  $\mathbf{D}(\phi)$ , d.h. für die gilt

$$\mathbf{D}'(\phi) \cdot \mathbf{D}(\phi) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}?$$

*Tipp: Überlegen Sie zunächst anschaulich, was Sie tun müssen, um einen gedrehten Vektor in den Ausgangszustand zurück zu versetzen.*

## Aufgabe 2: Transformationen (4 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie  $\mathbf{b}' = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{b}$  für  $\mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{S}_2$  und  $\mathbf{S}_3$  mit  $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$ .

- (b) Nennen Sie außerdem die geometrische Interpretation der Transformationen.

**Aufgabe 3: Nicht kommutierende Matrizen***(4 Punkte)*

Gegeben seien die Transformationen  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \mathbf{D}(\pi/2), \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

wobei  $\mathbf{D}$  wieder die Drehmatrix um die z-Achse ist, sowie  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass die Transformationen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  nicht kommutieren, d.h. zeigen Sie, dass der Kommutator

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \neq 0$$

nicht verschwindet.

- (b) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Transformationen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  an und erklären Sie, wieso diese nicht kommutieren.
- (c) Bestimmen Sie den Kommutator für  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$ . Was fällt Ihnen im Vergleich zu  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  auf?