Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 5, SS19

A. Nikoubashman, F. Berressem und Assistenten Abgabe 31.05.19, 14:00

Wichtig: Vermerken Sie auf dem Deckblatt Ihrer Lösung Ihren Namen, Matrikelnummer, Gruppennummer und optional eine ungefähre Bearbeitungszeit.

Aufgabe 1: Ableitung der Potenzsumme (*8 Punkte*)

Leiten Sie die Ableitung einer Potenzsumme über $\mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=-l}^{n} a_k\, x^k,$$

mit $n, l \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ aus der Definition der Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

her. Gehen Sie dafür Schrittweise vor:

(a) (3 Punkte) Sei $f(x) = x^n$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = n\, x^{n-1}.$$

Verwenden Sie hierfür

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, h^k,$$

mit dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Dabei bezeichnet $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ die Fakultät von n.

(b) (3 Punkte) Sei $f(x) = x^{-n}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = -n\, x^{-n-1}.$$

Hinweis: Es gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = \frac{\lim_{h \to 0} f(h)}{\lim_{h \to 0} g(h)},$$

für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ falls $\lim_{h \to 0} g(h) \neq 0$.

Tipp: *Bringen Sie den Differenzenquotienten auf einen Nenner und ziehen sie den auftretenden Ausdruck h^{-1} in den Zähler. Nun können Sie für den Zähler das Resultat aus (a) wiederverwenden und anschließend den Grenzwert bestimmen.*

(c) (2 Punkte) Verwenden Sie die Erkenntnisse aus (a), (b) und die Linearität der Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+\alpha g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g,$$

um schließlich die Ableitung von $f(x) = \sum_{k=-l}^{n} a_k\, x^k$ bei $x \neq 0$ zu bestimmen.

Aufgabe 2: Ableitungen *(12 Punkte)*

Für zwei differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt die Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\, g = \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right)\, g + f\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g$$

und die Kettenregel

$$\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g)\right)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\,(g(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)\, \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right)(g(x))\,.$$

Mit $f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ also kurz $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$ und $f\,(g(x))' = g'(x)\,f'\,(g(x))$.

Berechnen Sie folgende ersten

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x)\cos(x)$

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}^+$

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \exp(x)$

(d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x\omega - f(x))$

(e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln\left(x^2\right)$

(f) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(x^2\right)\cos(x)$

(g) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sqrt{\cos(x)}, x \in [-\pi/2, \pi/2]$

(h) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{f(x)}$

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{2\ln(x)+\ln(x)}{\ln\left(x^3\right)}, x \in \mathbb{R}^+$

und zweiten Ableitungen

(j) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(g(x))$

(k) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln(\exp(2x+3))$

(l) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \exp(2x+3)$

Hinweis: *Es gilt* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^q = q\, x^{q-1}$ *auch allgemeiner für* $q \in \mathbb{Q}$. *Insbesondere auch für* $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.