Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 8, SS19

A. Nikoubashman, F. Berressem und Assistenten Abgabe 21.06.19, 14:00

Wichtig: Vermerken Sie auf dem Deckblatt Ihrer Lösung Ihren Namen, Matrikelnummer, Gruppennummer und optional eine ungefähre Bearbeitungszeit.

Legen Sie sämtliche Berechnungen begründet und nachvollziehbar dar. Nur eine Angabe des Ergebnisses ist außer in trivialen Fällen nicht ausreichend.

Aufgabe 1: Taylorreihen 1 (*9 Punkte*)

Leiten Sie die Taylorreihe folgender Funktionen um den angegebenen Punkt x_0 her:

(a) (2 Punkte) $\sin(x)$, $x_0 = 0$.

Führen Sie außerdem eine Restgliedabschätzung für $|x| < 1$ durch, wenn Sie die Reihe nach drei, von null verschiedenen, Termen abbrechen.

(b) (2 Punkte) $\cos(x)$, $x_0 = 0$.

Führen Sie ebenfalls eine Restgliedabschätzung wie in Teilaufgabe (a) durch.

(c) (1 Punkt) $f_1(x) = ax^2 + bx + c, \quad x_0 = 0$

(d) (2 Punkte) $f_2(x) = \sinh(x), \quad x_0 = 0$

Beachten Sie hierbei: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(e) (2 Punkte) $f_3(x) = \ln(x), \quad x_0 = 1$

Aufgabe 2: Taylorreihen 2 (*6 Punkte*)

Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 1 (e) die Taylorreihen der folgenden Funktionen um $x_0 = 0$.

(a) (2 Punkte) $\ln(x + 1)$

(b) (2 Punkte) $\ln(1 - x)$

(c) (2 Punkte) $\dfrac{1}{1 + x}$

Aufgabe 3: Konvergenzradius der Potenzreihe (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Reihen:

(a) (1 Punkt) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

(b) (1 Punkt) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

(c) (1 Punkt) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n}{2^n n^3} x^n$

(d) (2 Punkte) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_{2i} = 1, a_{2i+1} = \frac{1}{i+1}, i \in \mathbb{N}_0$

Hinweis: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$.