



Wichtig: Vermerken Sie auf dem Deckblatt Ihrer Lösung Ihren Namen, Matrikelnummer, Gruppennummer und optional eine ungefähre Bearbeitungszeit.

Legen Sie sämtliche Berechnungen begründet und nachvollziehbar dar. Nur eine Angabe des Ergebnisses ist außer in trivialen Fällen nicht ausreichend.

Aufgabe 1: Partielle Ableitungen

(6 Punkte)

Bestimmen Sie alle ersten und zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen:

- (a) (1 Punkt) $f_1(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$
- (b) (1 Punkt) $f_2(x, y) = x^y$
- (c) (2 Punkte) $f_3(\phi, \mu) = \exp\{\mu \cos(\phi)\} + \ln\left(\frac{\mu}{\phi}\right)$
- (d) (2 Punkte) $f_4(x, y) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|r|}$, mit $|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Aufgabe 2: Satz von Schwarz

(6 Punkte)

Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in beiden Variablen zweimal stetig differenzierbar, so vertauschen die partiellen Ableitungen.

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}.$$

- (a) (2 Punkte) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}g(x, y)$ und $\frac{\partial}{\partial y}g(x, y)$ für $(x, y) \neq (0, 0)$.
- (b) (1 Punkt) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen an der Stelle $(0, 0)$. Verwenden Sie hierfür den Differentialquotienten.
- (c) (2 Punkte) Berechnen Sie die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}g(x, y)$ und $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}g(x, y)$ für $(x, y) \neq (0, 0)$.
- (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ der Funktion nicht vertauschen und es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(0, 0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(0, 0).$$

Verwenden Sie hierfür den Differentialquotienten.

Aufgabe 3: Integration

(8 Punkte)

Bestimmen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen

(a) (2 Punkte) $\int \sin^2(x) dx$

(c) (2 Punkte) $\int x e^{-2x} dx$

(b) (2 Punkte) $\int \ln(x) dx$

(d) (2 Punkte) $\int \tan(x) dx$