

Biostatistik, WS 2010/2011

Matthias Birkner

<http://www.mathematik.uni-mainz.de/~birkner/Biostatistik1011/>

29.10.2010

Inhalt

- 1 Einführung
- 2 Organisatorisches
 - Themenplan
 - Literatur
- 3 Dreisatz, lineare Gleichungen
 - Dreisatz
 - Gleichungen
- 4 Funktionen und Folgen
 - Folgen und Funktionen: mathematische Begriffe und Definitionen
 - Beispiel: Hardy-Weinberg-Gleichgewicht
 - Beispiel: Allelhäufigkeiten unter Selektion

Orte, Zeiten, Übungen, Zulassungskriterien, ...

- Fr. 8–10, Hörsaal 00 521 N 1 (Muschel)
- <http://www.mathematik.uni-mainz.de/~birkner/Biostatistik1011/>
(dort werden die Folien, Verweise auf die Übungen, Datensätze, etc. stehen)
- Übungen: elektronisch via `ilias`, von Felix Schneider betreut. Abgabe jeweils bis Sonntags, 23:59 (9 Tage Bearbeitungszeit)
- B.Sc.-Studenten müssen mind. 20% der Übungspunkte erreichen, um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Tutorien: 2h/Woche, für Fragen, Besprechung der Übungsaufgaben, etc. Termine: nächste Folie
- Semesteranfangs-Quiz: wird nächste Woche in den Tutorien besprochen
- Klausur (Modul 4): Sa., 12.2.2011

5/48

Tutoriumstermine und -räume

Es wird 6 Tutorien geben

Mo 10–12, Raum 05-514
Mo 12–14, Raum 05-514
Di 08–10, Raum 05-514
Mi 10–12, Raum 05-514
Mi 14–16, Raum 05-514
Mi 12–14, Raum 04-224

Räume im Institut für Mathematik, Staudingerweg 9

Eintragung in Teilnehmerlisten direkt in der ersten Sitzung des jeweiligen Tutoriums

6/48

Voraussichtliche Themen

Mathematik-Wiederholung

- Dreisatz, lineare Gleichungen, Folgen, Funktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktion
- Differential- und Integralrechnung

Einführung in die Statistik

- Deskriptive Statistik
- Standardfehler
- Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie
- t -Test
- Lineare Regression
- Schätzer, Konfidenzintervalle
- Kontingenztafeln und χ^2 -Test
- Rangtests

8/48

Meta-Lernziele

1. Mathematik und Statistik stellen nützliche Werkzeuge für die Biologie bereit
2. Mathematik und Statistik sind (gar) nicht (so) schwer

9/48

Literaturhinweise (UB Lehrbuchsammlung)

Es gibt (meines Wissens nach) kein Buch, das exakt nur den Vorlesungsstoff umfasst. Folgende Bücher sind jeweils mehrfach in der UB vorhanden, sie überdecken den Stoff der Vorlesung (für den „mathematischen“ Teil 1–2, für den „statistischen“ Teil 3–5) und gehen z.T. deutlich darüber hinaus.

- 1 H. Vogt, *Grundkurs Mathematik für Biologen*, 2. Aufl., Teubner, 1994.
- 2 A. Riede, *Mathematik für Biologen*, Vieweg, 1993.
- 3 F. Bärlocher, *Biostatistik*, Thieme, 1999.
- 4 W. Timischl, *Biostatistik : eine Einführung für Biologen und Mediziner*, 2. Aufl., Springer, 2000.
- 5 W. Köhler, G. Schachtel, P. Voleske, *Biostatistik : eine Einführung für Biologen und Agrarwissenschaftler*, 4. Aufl., Springer, 2007.
(Auch als E-Book vorhanden)

Empfehlung: In verschiedene Bücher „hineinschnuppern“
(Frage des persönlichen Stils und Geschmacks)

11/48

Quellen und Dank

Diese Vorlesung basiert zu weiten Teilen auf Material von Brooks Ferebee, Gaby Schneider und Anton Wakolbinger (Universität Frankfurt) sowie von Martin Hutzenthaler und Dirk Metzler (LMU München).

Darüberhinaus habe ich einige Beispiele von Hans Schuh (Mainz) übernommen.

Ich danke Ihnen herzlich für die Bereitstellung des Materials und vieler Beispiele.

12/48

Dreisatzrechnung: Anwendbar, wenn zwei Meßgrößen zueinander proportional bzw. indirekt proportional (d.h. die eine proportional zum Kehrwert der anderen) sind.

Beispiel 1. Eine vorgegebene Proteinlösung hat eine Konzentration von $20 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}$. Wir möchten $500 \mu\text{l}$ einer Proteinlösung mit einer Konzentration von $0,3 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ erstellen. Wie viele μl der vorliegenden Proteinlösung (und wieviel zusätzliches reines Lösungsmittel) werden benötigt?

Erinnerung:

$$1\text{l} = 1000\text{ml} = 1\,000\,000\mu\text{l}$$

Konzentration (des Proteins in der Lösung) = $\frac{\text{gelöste Proteinmasse}}{\text{Volumen der Lösung}}$,

also sind bei konstanter Konzentration die Masse der gelösten Substanz und das Volumen der Lösung zueinander proportional (d.h. Verdopplung der Masse entspricht Verdopplung des Volumens, etc.).

15/48

Beispiel 1. Eine vorgegebene Proteinlösung hat eine Konzentration von $20 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}$. Wir möchten $500 \mu\text{l}$ einer Proteinlösung mit einer Konz. von $0,3 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ erstellen. Wie viele μl der vorliegenden Proteinlösung werden benötigt?

Lösung (Direkter Dreisatz):

(Bei konstanter Konzentration sind Masse (an gelöstem Protein) und Volumen (der Lösung) zueinander proportional.)

1. Schritt : Berechne die in der neuen Lösung gelöste Proteinmasse y

$$\begin{array}{l} 1 \text{ ml} = 1000 \mu\text{l} \quad \text{enthalten} \quad 0,3 \text{ mg} \\ 1 \mu\text{l} \quad \text{enthält} \quad \frac{0,3}{1000} \text{ mg} \\ 500 \mu\text{l} \quad \text{enthalten} \quad y = \frac{0,3 \cdot 500}{1000} \text{ mg} = 0,15 \text{ mg} \end{array}$$

2. Schritt : Berechne das benötigte Volumen x der gegebenen Lösung

$$\begin{array}{l} 20 \text{ mg in } 1 \text{ ml} \\ 1 \text{ mg in } \frac{1}{20} \text{ ml} \\ 0,15 \text{ mg in } x = 0,15 \cdot \frac{1}{20} \text{ ml} = 0,0075 \text{ ml} = 7,5 \mu\text{l} \\ \text{Gewünschtes Gesamtvolumen} = 500 \mu\text{l} = 7,5 \mu\text{l} + 492,5 \mu\text{l} \end{array}$$

Demnach : $7,5 \mu\text{l}$ der vorgegebenen Lösung müssen mit $492,5 \mu\text{l}$ reinen Lösungsmittels vermischt werden.

16/48

Beispiel 2. 10 μl eines 7 M Harnstoffes wird mit einer Pufferlösung auf 500 μl verdünnt. Was ist die Konzentration des Harnstoffes in der verdünnten Lösung?

Erinnerung (Stoffmengenkonzentration, „Molarität“):

1 mol eines Stoffes sind $6,022 \cdot 10^{23}$ Teilchen (Avogadro-Zahl),
Masse von 1 mol eines Stoffes

= (relative) Molekül-/Atommasse des Stoffes in g

Schreibweise:

$M = \frac{\text{mol}}{\text{l}}$ („molar“), 7 M Harnstoff („7 molare(r) Harnstoff(-Lösung)“) bezeichnet also eine Lösung, die 7 mol Harnstoff pro Liter enthält.

Lösung (Indirekter Dreisatz):

Konzentration = $\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$, also sind bei konstanter Masse der gelösten Substanz die Konzentration und das Volumen der Lösung zueinander indirekt proportional.

In 10 μl gelöster Harnstoff ist 7 M

In 500 μl gelöster Harnstoff ist $x = 7 \cdot \frac{10}{500} \text{ M} = 0,14 \text{ M}$

Demnach : Die verdünnte Harnstofflösung ist 0,14 M.

17/48

Bemerkung.

Die chemische Summenformel von Harnstoff ist $\text{CN}_2\text{H}_4\text{O}$, die (relative) Molekülmasse von Harnstoff ist demnach $12 + 2 \cdot 14 + 4 \cdot 1 + 16 = 60$.

Somit: 1 mol Harnstoff entspricht 60 g Harnstoff, die Konzentration der 0,14 M Harnstofflösung aus Beispiel 2, ausgedrückt in mg/ml, ist also

$$0,14 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \cdot 60 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 8,4 \frac{\text{g}}{\text{l}} = 8,4 \frac{1000\text{mg}}{1000\text{ml}} = 8,4 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}.$$

18/48

Ein erneuter Blick auf die Beispielrechnung

Beispiel 1. Eine vorgegebene Proteinlösung hat eine Konzentration von $20 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}$. Wir möchten $500 \mu\text{l}$ einer Proteinlösung mit einer Konzentration von $0,3 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ erstellen. Wie viele μl der vorliegenden Proteinlösung werden benötigt?

Aufstellen einer (linearen) Gleichung:

Sei x = benötigtes Volumen der gegebenen Proteinlösung (in μl).

$$x \mu\text{l} = \frac{x}{1000} \text{ ml}, \quad 500 \mu\text{l} = \frac{500}{1000} \text{ ml} = 0,5 \text{ ml}$$

Die Masse an gelöstem Protein ändert sich beim Verdünnen nicht, also (vorher=nachher)

$$\begin{aligned} \frac{x}{1000} \cdot 20 \text{ (mg)} &= 0,5 \cdot 0,3 \text{ (mg)} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{50} &= 0,15 \quad | \cdot 50 \\ \Leftrightarrow x &= 0,15 \cdot 50 = 7,5, \end{aligned}$$

d.h. es werden (wie wir wissen) $7,5 \mu\text{l}$ der gegebenen Lösung benötigt.

20/48

Beispiel: Stromrechnung

Ein Verbraucher bezieht seinen Strom zu folgenden Konditionen: 75 € Grundpreis pro Jahr und ein Arbeitspreis von 23 ct/kWh .

- a) Wie hoch ist die Stromrechnung, wenn im Jahr 1550 kWh verbraucht wurden?
 b) Ein anderer Haushalt zahlte bei diesem Tarif im letzten Jahr $827,10 \text{ €}$. Wieviel kWh hat dieser Haushalt verbraucht?

Gleichung aufstellen:

Sei p =Stromkosten (in € , für ein Jahr), x = Jahresverbrauch (in kWh)

$$p = 75 + 0,23x$$

a) $x = 1550$, also $p = 75 + 0,23 \cdot 1550 = 431,50$
 Die Stromrechnung kostet $431,50 \text{ €}$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad p &= 827,10 = 75 + 0,23x \quad | - 75 \\ 827,10 - 75 &= 0,23x \quad | : 0,23 \\ \frac{827,10 - 75}{0,23} &= 3270 = x \end{aligned}$$

Es wurden 3270 kWh verbraucht.

21/48

Folgen (abstrakt)

Eine (im Prinzip) unendliche Liste von Zahlen x_1, x_2, x_3, \dots

Beispiele

$$x_n = n : 1, 2, 3, \dots$$

$$x_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots$$

$$x_n = 1/n : 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$$

$$x_n = 29 : 29, 29, 29, \dots$$

Rekursive Definitionen

x_n = ein Ausdruck, der x_{n-1} enthält, z.B.

$$x_n = x_{n-1} + 5$$

(also $x_n = x_1 + 5(n-1)$, $n = 2, 3, 4, \dots$) „arithmetische Folge“

$$x_n = ax_{n-1}$$

(also $x_n = x_1 a^{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \dots$) „geometrische Folge“

Bem.: Eine „geschlossene“ Form von x_n zu finden kann i.A. schwierig (oder nahezu unmöglich) sein.

24/48

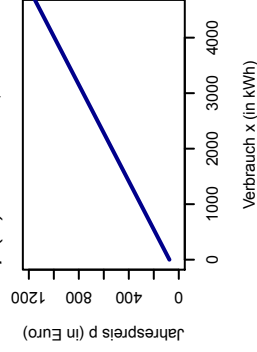
Funktionen (abstrakt)

Sehr allgemein: Eine Zuordnung, die jedem Element des *Definitionsbereichs* genau ein Element des *Wertebereichs* zuweist.

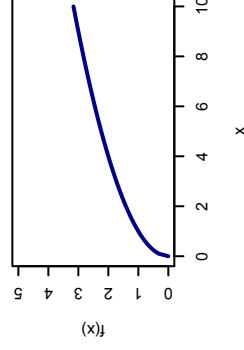
Beispiel: Teilnehmer der Vorlesung \longrightarrow Matrikelnummer
oder Teilnehmer der Vorlesung \longrightarrow Alter in Jahren

Oft werden Funktionen durch algebraische Ausdrücke definiert, z.B.

$$p(x) = 75 + 0,23x$$

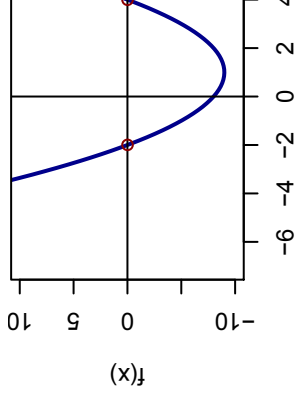
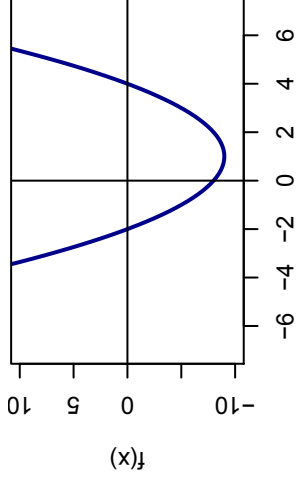


$$f(x) = \sqrt{x}$$



25/48

Funktionen (abstrakt, quadratisch)



In Anwendungen trifft man (gelegentlich) *quadratische* Funktionen, z.B.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x - 8 = x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1 - 1 - 8 \\ &= (x - 1)^2 - 9 = (x + 2)(x - 4) \end{aligned}$$

Erinnerung („*p-q-Formel*“): Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die (reellwertigen) Lösungen $-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ und $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ (sofern $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$).

26/48

Hardy-Weinberg-Gleichgewicht (1908)



Godfrey Harold Hardy
(1877–1947)



Wilhelm Weinberg
(1862–1937)

28/48

Idealisierte Population („Mathematisches Modell“): sehr groß, diploid, hermaphroditisch. An einem Genort gebe es zwei verschiedene Allele, A und a .

Annahme: „Neutralität“, d.h. Reproduktionserfolg unabhängig vom Genotyp.

Genotypenhäufigkeiten heute:

Genotyp	AA	Aa	aa
Anteil	x_{AA}	x_{Aa}	x_{aa}

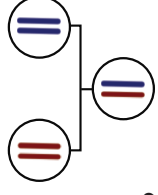
$$(x_{AA} + x_{Aa} + x_{aa} = 1)$$

Das bedeutet für die Allelhäufigkeiten

Allel	A	a
Anteil	$p_A = x_{AA} + \frac{1}{2}x_{Aa}$	$p_a = \frac{1}{2}x_{Aa} + x_{aa}$

(offenbar auch $p_A + p_a = 1$)

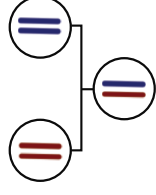
Wir nehmen weiter an:
 „rein zufällige Paarungen“,
 Mendelsche Segregation



Genotyphäufigkeiten in der nächsten Generation?

29/48

Heute:	Genotyp	AA	Aa	aa
	Anteil	x_{AA}	x_{Aa}	x_{aa}
Allel	A	a		
Anteil	$p_A = x_{AA} + \frac{1}{2}x_{Aa}$	$p_a = \frac{1}{2}x_{Aa} + x_{aa}$		



Nächste Generation:

Genotyp	AA	Aa	aa
Anteil	x'_{AA}	x'_{Aa}	x'_{aa}
Allel	A	a	
Anteil	p'_A	p'_a	p'_a

$$x'_{AA} = x_{AA}^2 + 2x_{AA}x_{Aa} \cdot \frac{1}{2} + x_{Aa}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = (x_{AA} + \frac{1}{2}x_{Aa})^2 = p_A^2$$

Analog:

$$x'_{Aa} = 2(x_{AA} + \frac{1}{2}x_{Aa})(x_{aa} + \frac{1}{2}x_{Aa}) = 2p_A p_a$$

$$x'_{aa} = x_{aa}^2 + 2x_{Aa}x_{aa} \cdot \frac{1}{2} + x_{Aa}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = (x_{aa} + \frac{1}{2}x_{Aa})^2 = p_a^2$$

30/48

Wir sehen:

Anteile heute: x_{AA}, x_{Aa}, x_{aa} (Genotypen),

$p_A = x_{AA} + \frac{1}{2}x_{Aa}, p_a = \frac{1}{2}x_{Aa} + x_{aa}$ (Allele)

Anteile nächste Generation:

$x'_{AA} = p_A^2, x'_{Aa} = 2p_A p_a, x'_{aa} = p_a^2$ (Genotypen),

$p'_A = x'_{AA} + \frac{1}{2}x'_{Aa} = p_A^2 + p_A p_a = p_A(p_A + p_a) = p_A,$

$p'_a = \frac{1}{2}x'_{Aa} + x'_{aa} = p_A p_a + p_a^2 = p_a(p_A + p_a) = p_a$ (Allele)

Also:

- Allelhäufigkeiten sind konstant über die Generationen.
- Unabhängig von den ursprünglichen Genotyphäufigkeiten stellt sich für die Genotypen AA, Aa, aa nach einer Generation das Verhältnis

$$p^2 : 2p(1 - p) : (1 - p)^2$$

ein und ändert sich dann nicht mehr:

Hardy-Weinberg-Gleichgewicht

31/48

Eine Anwendung von Wurzeln und quadratischen Gleichungen:

Im HW-Gleichgewicht ist wegen $x_{AA} = p_A^2$ offensichtlich

$p_A = +\sqrt{x_{AA}}$, analog $p_a = +\sqrt{x_{aa}}$.

Was kann man über die Allelhäufigkeit p_A sagen, wenn man nur x_{Aa} , die Häufigkeit der Heterozygoten, kennt?

$x_{Aa} = 2p_A(1 - p_A) = 2p_A - 2p_A^2$, also

$$p_A^2 - p_A + \frac{1}{2}x_{Aa} = 0.$$

$$p_A = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} - \frac{1}{2}x_{Aa}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2x_{Aa}} \text{ oder}$$

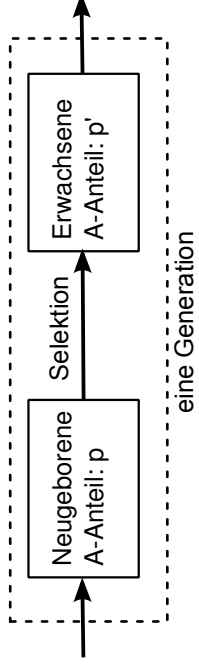
$$p_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2x_{Aa}} \quad (\text{gemäß „}p\text{-}q\text{-Formel“})$$

(Zusatzinformation erforderlich, um die Lösung auswählen, z.B. welches der beiden Allele häufiger ist.)

[Auch anschaulich klar: Heterozygotie ändern sich nicht bei A-a-Vertauschung.]

32/48

Ein Modell für Selektion



Genotyp	AA	Aa	aa
(rel.) Fitness	w_{AA}	w_{Aa}	w_{aa}

Interpretation: Die Chance eines Nachkommen vom Typ AA, bis zum Reproduktionsalter zu überleben, ist proportional zu w_{AA} , etc.

Beispiel 1:

Genotyp	AA	Aa	aa
(rel.) Fitness	1	0,95	0,9

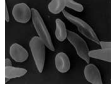
(nachteilige Flügelgefärbung bei *Callimorpha dominula*)



Beispiel 2:

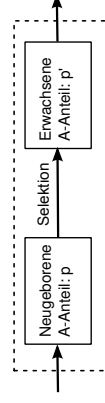
Genotyp	AA	Aa	aa
(rel.) Fitness	1	1,17	0

(Sichelzellanämie und endemische Malaria)



34/48

Ein Modell für Selektion: die nächste Generation



Genotyp	AA	Aa	aa
(rel.) Fitness	w_{AA}	w_{Aa}	w_{aa}
Anteil heute	p^2	$2pq$	q^2
rel. Anteil nächste Gen.	$p^2 w_{AA}$	$2pq w_{Aa}$	$q^2 w_{aa}$
Anteil nächste Gen.	$\frac{p^2 w_{AA}}{w_{\text{ges}}}$	$\frac{2pq w_{Aa}}{w_{\text{ges}}}$	$\frac{q^2 w_{aa}}{w_{\text{ges}}}$

wobei

p ($= p_A$) Anteil des A-Allels,
 $q = 1 - p$ ($= p_a$) Anteil des a-Allels,

$w_{\text{ges}} = p^2 w_{AA} + 2pq w_{Aa} + q^2 w_{aa}$
 die „Gesamtfitness“ der (heutigen) Population

35/48

Umparametrisierung

Wir schreiben statt w_{AA} , w_{Aa} , w_{aa} lieber

Genotyp	AA	Aa	aa
(rel.) Fitness	1	$1 - hs$	$1 - s$

wobei

s : Selektionskoeffizient, $s \leq 1$,

h : (Koeffizient des „Heterozygoteneffekt(s)“).

Beispiel 1:

AA	Aa	aa
1	0,95	0,9

$s = 0,1$, $h = 0,5$

Beispiel 2:

AA	Aa	aa
1	1,17	0

$s = 1$, $h = -0,17$

36/48

Verschiedene Szenarien von Selektion

Genotyp	AA	Aa	aa
(rel.) Fitness	1	$1 - hs$	$1 - s$

$s = 0$: neutraler Fall

$s \neq 0$ (wir betrachten den Fall $0 < s \leq 1$, sonst vertausche die Rollen von A und a)

$h = 1$: A rezessiv

$h = 0$: A dominant

$0 < h < 1$: unvollständige Dominanz

$h < 0$: Überdominanz (Aa „am fittesten“)

$h > 1$: Unterdominanz

(Bem.: $h = 1/2$: „additiver Finesseffekt“, ist mathematisch besonders angenehm und häufig für $s \approx 0$ gerechtfertigt)

37/48

Fragen

Verändern sich die Allelhäufigkeiten im Laufe der Zeit?
Wenn ja, wie?

Wie sieht es nach sehr langer Zeit aus?

Wird sich das A -Allel durchsetzen?

Mathematisch formuliert:

Sei p_n der Anteil A -Allele in der Population in Generation n ,
 $n = 0, 1, 2, \dots$

Wie verhält sich p_n , wenn n nach ∞ strebt?

Die Antwort hängt (hauptsächlich) von h ab ...

38/48

Änderung des A -Anteils als Funktion des aktuellen Anteils

Anteil heute: p relative Fitness:

AA	Aa	aa
1	$1 - hs$	$1 - s$

Anteil in der nächsten Generation:

$$N(p) := \frac{p^2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2pq \cdot (1 - hs)}{p^2 + 2pq(1 - hs) + q^2(1 - s)}$$

(mit $q = 1 - p$)

Änderung über eine Generation

$$\begin{aligned} d = N(p) - p &= \frac{p^2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2pq \cdot (1 - hs)}{p^2 + 2pq(1 - hs) + q^2(1 - s)} - p \\ &= \frac{spq(ph + q(1 - h))}{p^2 + 2pq(1 - hs) + q^2(1 - s)} \end{aligned}$$

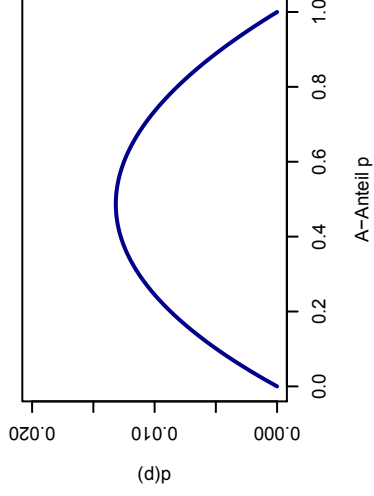
[Details der Rechnung ggf. an der Tafel!]

39/48

$0 \leq h \leq 1$: gerichtete Selektion (Diagramm für $s=0,1$, $h=0,5$)

Änderung des A-Anteils als Funktion von p :

$$d(p) = \frac{sp(1-p)(ph + (1-p)(1-h))}{p^2 + 2p(1-p)(1-hs) + (1-p)^2(1-s)}$$

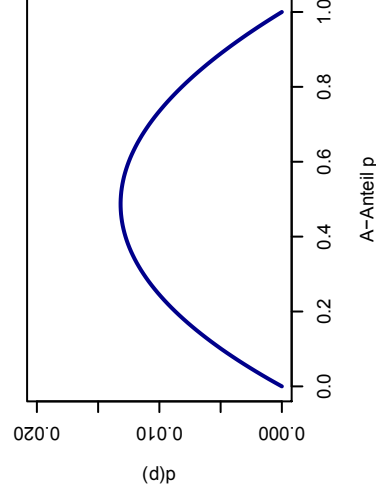


Wir sehen: $d(p) > 0$ außer für $p \in \{0, 1\}$, d.h. der A-Anteil nimmt stets zu.

40/48

$0 \leq h \leq 1$: gerichtete Selektion (Diagramm für $s=0,1$, $h=0,5$)

Änderung des A-Anteils $d(p)$ als Funktion von p :

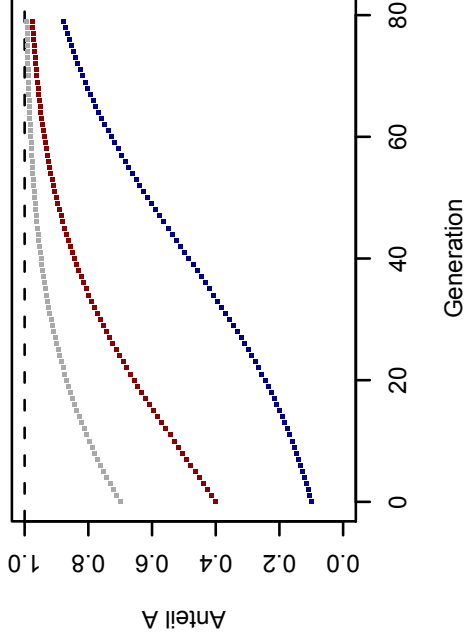


$d(p) > 0$, d.h. der A-Anteil nimmt stets zu (außer für $p \in \{0, 1\}$).
Mathematisch ausgedrückt:

$$p_n = N(p_{n-1}) = p_{n-1} + d(p_{n-1}) > p_{n-1}$$

41/48

$0 \leq h \leq 1$: gerichtete Selektion, Konvergenz des A-Anteils



Anteil A in Abhängigkeit der Generation für verschiedene Startwerte ($s=0,1$, $h=0,5$)

42/48

$0 \leq h \leq 1$: gerichtete Selektion, Konvergenz des A-Anteils

$p_n = p_{n-1} + d(p_{n-1})$, also für $0 < p_1 < 1$:
 $p_1 < p_2 < p_3 < \dots \leq 1$, andererseits kann p_n für $\varepsilon > 0$ nicht für alle n unterhalb $1 - \varepsilon$ liegen (denn die Funktion $d(\cdot)$ ist strikt positiv im Intervall $[p_1, 1 - \varepsilon]$), somit haben wir bewiesen

Satz

Im Fall $0 \leq h \leq 1$ gilt für jedes $p_1 \in (0, 1]$: $p_n \rightarrow p^* = 1$ für $n \rightarrow \infty$

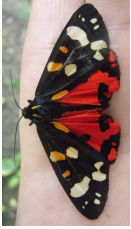
(Man sagt: „Die Folge p_n konvergiert gegen p^* “ und schreibt dies auch als $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p^*$)

Biologische Interpretation

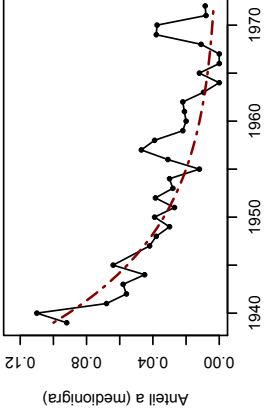
Im Fall $0 \leq h \leq 1$ setzt sich stets Allel A durch (sofern es zu Beginn vorhanden ist). Die Population wird auf lange Sicht nur aus AA-Individuen bestehen.

43/48

Beispiel: Das *medionigra*-Allel (*a*) in einer Population von *Callimorpha dominula* (dt. Schönbär) in Oxford



Beobachteter Anteil *a* 1939–1972 und Modellvorhersage



Nach Kap. 3 in John H. Gillespie, *Population genetics : a concise guide*, Johns Hopkins Univ. Press, 1998, siehe auch Ford, E.B. and P.M. Sheppard, The medionigra polymorphism of *Panaxia dominula*. *Hereditas* 24:112–134, 1969.

Bemerkung. Die Modellkurve passt recht gut, das beweist allerdings nicht, dass tatsächlich gerichtete Selektion für die beobachteten Änderungen des *a*-Anteils verantwortlich ist — es könnte andere Effekte geben, die z.T. kontrovers in der Literatur diskutiert werden.

44/48

$h < 0$: balancierende Selektion

Erinnerung: Rel. Fitness $1 : 1 - hs : 1 - s$, also bedeutet $h < 0$, dass Heterozygote der „fitteste“ Typ sind.
(Erneut.) Änderung als Funktion von p :

$$d(p) = \frac{sp(1-p)(ph + (1-p)(1-h))}{p^2 + 2p(1-p)(1-hs) + (1-p)^2(1-s)}$$

Für welche p ist $d(p) = 0$?

$p = 0$, $p = 1$, oder p Lösung von

$$ph + (1-p)(1-h) = 0,$$

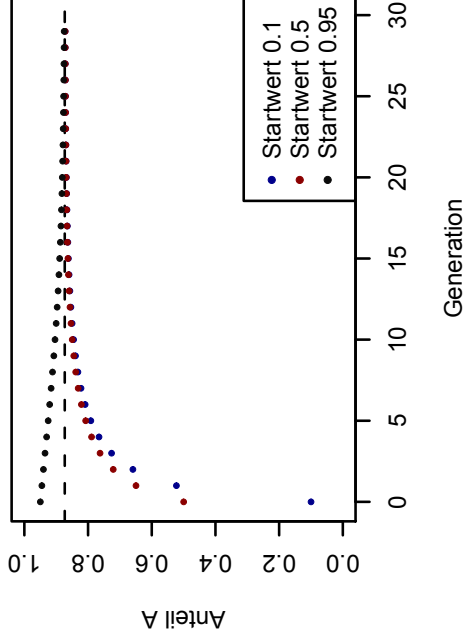
$$\text{d.h. } p = \hat{p} = \frac{1-h}{1-2h}.$$

Im Beispiel: $h = -0,17$, $\hat{p} = 0,87$ (also $1 - \hat{p} = 0,13$)

45/48

$h < 0$: balancierende Selektion

Zeitliche Entwicklung des A-Anteils bei verschiedenen Startwerten ($s=1$, $h=-0,17$)



46/48

 $h < 0$: balancierende Selektion, Konvergenz

$$p_n = p_{n-1} + d(p_{n-1}), \quad \hat{p} = \frac{1-h}{1-2h}$$

Man kann (leicht) zeigen, dass $p_1 < p_2 < p_3 < \dots \leq \hat{p}$ wenn

$$0 < p_1 < \hat{p} \text{ und}$$

$$p_1 > p_2 > p_3 > \dots \geq \hat{p} \text{ wenn } \hat{p} < p_1 < 1,$$

somit

Satz

Im Fall $h < 0$ gilt für jedes $p_1 \in (0, 1)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \hat{p} = \frac{1-h}{1-2h}.$$

(Die Folge p_n konvergiert gegen \hat{p} .)

Biologische Interpretation

Im Fall $h < 0$ bleiben beide Allele in der Population erhalten, das genaue Verhältnis hängt von h ab (das hier die Stärke der Überdominanz misst).

47/48



Übrigens: Der Schönbär ist Schmetterling des Jahres 2010
www.bund-nrw-naturschutzstiftung.de/schmetterling2010.htm