Markovketten und Mischzeiten

Matthias Birkner

Hauptseminar, WS 2015/16

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Markovketten mit endlichem Zustandsraum

$X_0, X_1, X_2, \ldots$ Markovkette, Wertebereich S, $|S| < \infty$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(X_{k+1} = y \,\big|\, X_k = x, \text{Pfad bis Zeit } k\big) \\ = \mathbb{P}\big(X_{k+1} = y \,\big|\, X_k = x\big) = a_{xy},\end{aligned}$$

$A = (a_{xy})_{x,y \in S}$ die Übergangsmatrix

Markovketten mit endlichem Zustandsraum

$X_0, X_1, X_2, \ldots$ Markovkette, Wertebereich S, $|S| < \infty$

$$\mathbb{P}\big(X_{k+1} = y \,\big|\, X_k = x, \text{Pfad bis Zeit } k\big) = \mathbb{P}\big(X_{k+1} = y \,\big|\, X_k = x\big) = a_{xy},$$

$A = (a_{xy})_{x,y \in S}$ die Übergangsmatrix

k-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}\big(X_k = y \,\big|\, X_0 = x\big) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \in S} a_{x,x_1} a_{x_1,x_2} \cdots a_{x_{k-2},x_{k-1}} a_{x_{k-1},x} = A^k_{x,y}$$

(k-te Potenz der Übergangsmatrix)

Konvergenz ins Gleichgewicht

$$\mathbb{P}\big(X_k = y \,\big|\, X_0 = x\big) = A^k_{x,y} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \pi(\{y\})$$

(unter gewissen, relativ milden Bedingungen)

wo π die Gleichgewichtsverteilung von X ist:

$$\pi A = \pi, \quad X_0 \sim \pi \;\Rightarrow X_1 \;\sim \pi \;\Rightarrow \cdots \Rightarrow X_k \;\sim \pi \;\; \forall\, k$$

Konvergenz ins Gleichgewicht

$$\mathbb{P}\big(X_k = y \,\big|\, X_0 = x\big) = A^k_{x,y} \xrightarrow[k\to\infty]{} \pi(\{y\})$$

(unter gewissen, relativ milden Bedingungen)

wo π die Gleichgewichtsverteilung von X ist:

$$\pi A = \pi, \quad X_0 \sim \pi \;\Rightarrow X_1 \;\sim \pi \;\Rightarrow \cdots \Rightarrow X_k \;\sim \pi \;\; \forall\, k$$

Zentrale Frage: Wie schnell ist diese Konvergenz?

Beispiel: Kartenmischen per Riffle-Shuffle

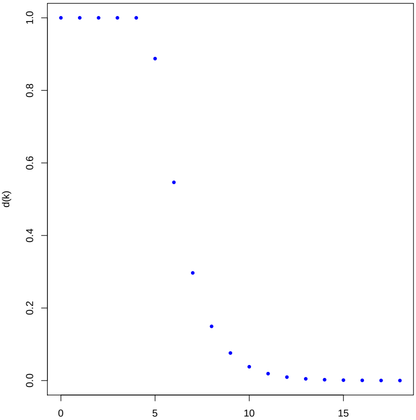
$S = \{\text{Permutationen von } 1, \ldots, n\}$,

X_k = Permutation nach k-maligem Mischen

Beispiel: Kartenmischen per Riffle-Shuffle

$S = \{\text{Permutationen von } 1, \ldots, n\}$,

X_k = Permutation nach k-maligem Mischen



$$d(k) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in S} \left| \mathbb{P}(X_k = \gamma \mid X_0 = \mathrm{id}) - \frac{1}{n!} \right| \qquad \text{für } n = 48$$

Ising-Modell und Glauber-Dynamik

Ein einfaches thermodynamisches und quantenmechanisches Modell für (Ferro-)Magnetismus von Kristallen (Ernst Ising, 1924)

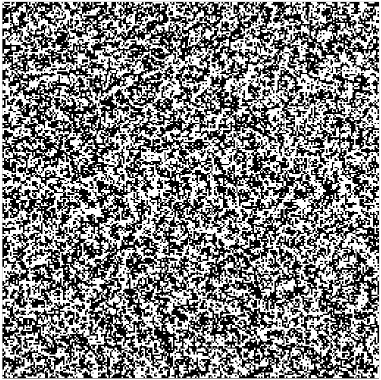
$\Lambda = \{0, 1, \ldots, L-1\}^2 \subset \mathbb{Z}^2$,
$S = \{-1, +1\}^\Lambda \ni \sigma = (\sigma_{(i,j)})_{(i,j)\in\Lambda}$

$$\pi(\{\sigma\}) = \frac{1}{Z(\beta)} \exp\Big(\beta \sum_{(i,j)\sim(i',j')} \sigma_{(i,j)}\sigma_{(i',j')}\Big)$$

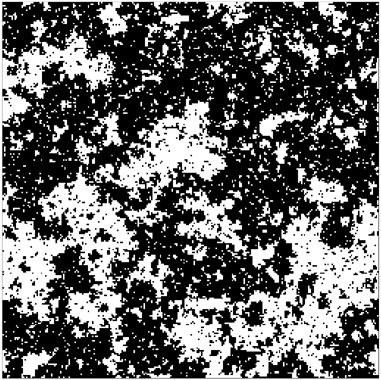
[$(i,j) \sim (i',j')$: (i,j) und (i',j') sind benachbarte Gitterpunkte]
β ... (inverser) Temperaturparameter

$(X_k)_{k=0,1,\ldots}$ Markovkette auf S mit Gleichgewicht π

Simulationen eines Zustands gemäß π für $L = 256$



$\beta = 0.2$



$\beta = 0.43$

Quelle(n)

David A. Levin, Yuval Peres, Elizabeth L. Wilmer,
Markov Chains and Mixing Times
(with a chapter on “Coupling from the Past” by
James G. Propp and David B. Wilson), AMS 2009.

`http://pages.uoregon.edu/dlevin/MARKOV/`

Ggfs. weitere Artikel oder Buchkapitel aus der
mathematischen Fachliteratur

Quelle(n)

David A. Levin, Yuval Peres, Elizabeth L. Wilmer,
Markov Chains and Mixing Times
(with a chapter on “Coupling from the Past” by
James G. Propp and David B. Wilson), AMS 2009.

`http://pages.uoregon.edu/dlevin/MARKOV/`

Ggfs. weitere Artikel oder Buchkapitel aus der mathematischen Fachliteratur

Vorbesprechung

Mi., 22.7.2015, 13h, Raum 05-522