

# Statistik für Informatiker, SS 2017

## 1.3 Erwartungswert, Varianz und Kovarianz

### 1.3.4 Median(e)

Matthias Birkner

<http://www.staff.uni-mainz.de/birkner/StatInfo17/>

14.6.2017



JOHANNES GUTENBERG  
UNIVERSITÄT MAINZ

Anschaulich ist der Median einer reellen Zufallsvariable  $X$  der Wert  $m$ , so dass

$$\text{„}P(X \leq m) = \frac{1}{2} = P(X \geq m)\text{“}$$

gilt.

Anschaulich ist der Median einer reellen Zufallsvariable  $X$  der Wert  $m$ , so dass

$$\text{„}P(X \leq m) = \frac{1}{2} = P(X \geq m)\text{“}$$

gilt.

Da man diese Gleichheit (zupal im diskreten Fall) nicht immer genau einstellen kann, definiert man formal folgendermaßen:

### Definition 1.79

$X$  reelle ZV,  $m$  heißt (ein) Median von  $X$  (auch „Zentralwert“, manchmal auch  $m_X$  geschrieben), wenn gilt

$$P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}.$$

$m$  Median von  $X$ , wenn

$$P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}.$$

Ein Median existiert stets, auch wenn  $X$  keinen Erwartungswert besitzt.

$m$  Median von  $X$ , wenn

$$P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}.$$

Ein Median existiert stets, auch wenn  $X$  keinen Erwartungswert besitzt.

Man kann den Median als eine „robustere“ Antwort auf die Aufgabe, für eine ZV *nur einen* „typischen Wert“ anzugeben, ansehen (im Gegensatz zum Erwartungswert besitzt ja jede Verteilung einen Median).

$m$  Median von  $X$ , wenn

$$P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}.$$

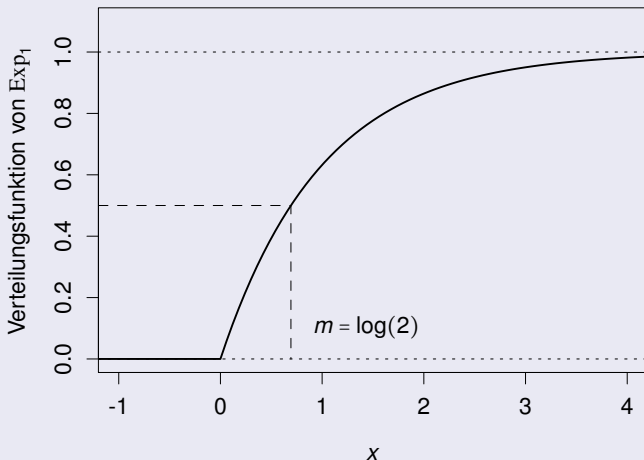
Ein Median existiert stets, auch wenn  $X$  keinen Erwartungswert besitzt.

Man kann den Median als eine „robustere“ Antwort auf die Aufgabe, für eine ZV *nur einen* „typischen Wert“ anzugeben, ansehen (im Gegensatz zum Erwartungswert besitzt ja jede Verteilung einen Median).

Allerdings gibt es für Mediane keine so angenehmen Rechenregeln, wie sie Satz 1.64 für den Erwartungswert liefert.

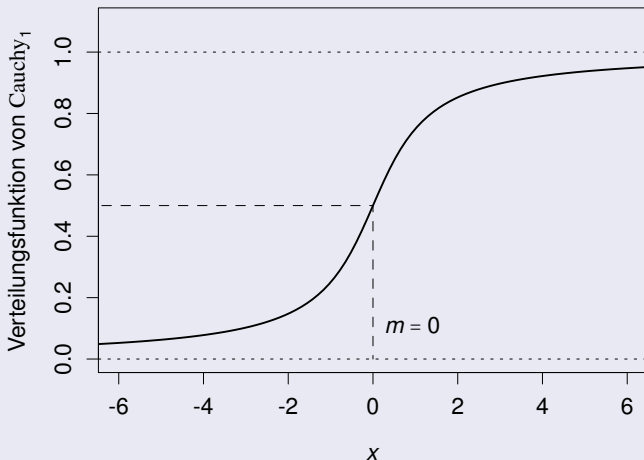
## Beispiel 1.80

1.  $X \sim \text{Exp}_\theta$  hat Dichte  $\theta e^{-\theta x} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x)$ , Verteilungsfunktion  $(1 - e^{-\theta x}) \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x)$ , demnach ist der (eindeutig bestimmte) Median  $m = \frac{1}{\theta} \log 2$ .



## Beispiel 1.80 (Fortsetzung)

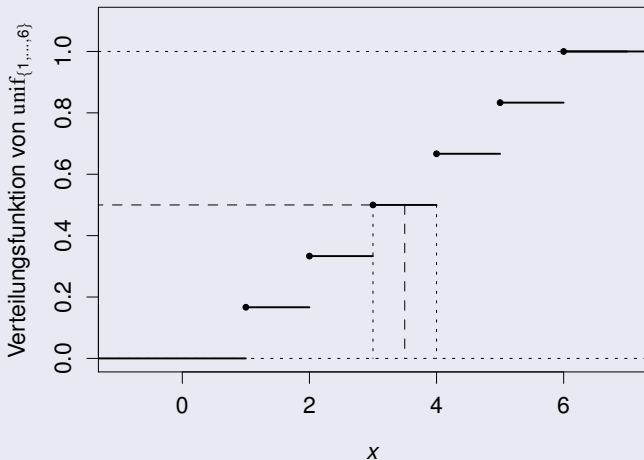
2.  $X$  Cauchy-verteilt mit Dichte  $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ , Verteilungsfunktion  $\frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \arctan(x)$ , der (eindeutig bestimmte) Median ist  $m = 0$ .





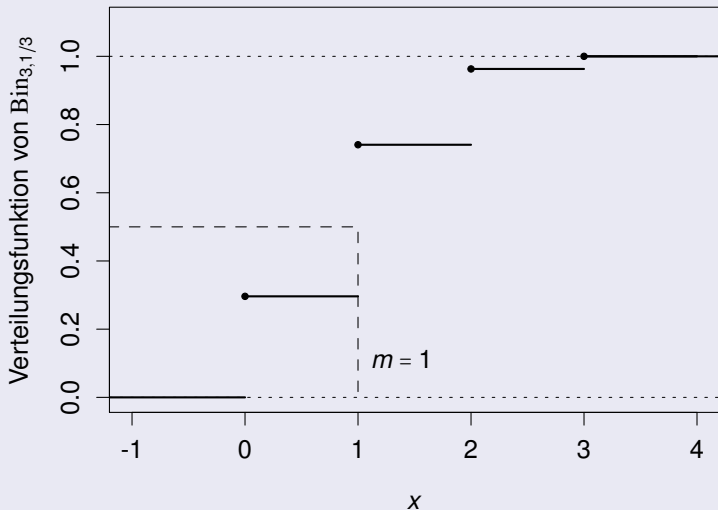
## Beispiel 1.80 (Fortsetzung)

3.  $X \sim \text{unif}_{\{1,2,\dots,6\}}$



Jeder Wert  $m \in [3, 4]$  ist ein Median (und die vielleicht „kanonischste“ Wahl wäre  $m = 3,5$ ).

## Beispiel 1.80 (Fortsetzung)

4.  $X \sim \text{Bin}_{3,1/3}$  hat Median 1

## Bemerkung 1.81

Sei  $X \in \mathcal{L}^1$ .

1. Jeder Median von  $X$  ist ein Minimierer von

$$a \mapsto \mathbb{E}[|X - a|].$$

2. Für jeden Median  $m$  ist  $|\mathbb{E}[X] - m| \leq \sqrt{\text{Var}[X]}$ .

## Bemerkung 1.81

Sei  $X \in \mathcal{L}^1$ .

1. Jeder Median von  $X$  ist ein Minimierer von

$$a \mapsto \mathbb{E}[|X - a|].$$

2. Für jeden Median  $m$  ist  $|\mathbb{E}[X] - m| \leq \sqrt{\text{Var}[X]}$ .

*Beweis.* 1. Sei  $m$  ein Median. Falls  $a > m$ :

$$|X - a| - |X - m| \geq (a - m)\mathbf{1}_{\{X \leq m\}} - (a - m)\mathbf{1}_{\{X > m\}},$$

also

$$\mathbb{E}[|X - a|] - \mathbb{E}[|X - m|] \geq (a - m) \left( \underbrace{P(X \leq m)}_{\geq 1/2} - \underbrace{P(X > m)}_{\leq 1/2} \right) \geq 0,$$

analog im Fall  $a < m$ .

## Bemerkung 1.81

Sei  $X \in \mathcal{L}^1$ .

1. Jeder Median von  $X$  ist ein Minimierer von

$$a \mapsto \mathbb{E}[|X - a|].$$

2. Für jeden Median  $m$  ist  $|\mathbb{E}[X] - m| \leq \sqrt{\text{Var}[X]}$ .

## Bemerkung 1.81

Sei  $X \in \mathcal{L}^1$ .

1. Jeder Median von  $X$  ist ein Minimierer von

$$a \mapsto \mathbb{E}[|X - a|].$$

2. Für jeden Median  $m$  ist  $|\mathbb{E}[X] - m| \leq \sqrt{\text{Var}[X]}$ .

*Beweis.* 2. Es ist

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[X] - m| &= |\mathbb{E}[X - m]| \leq \mathbb{E}[|X - m|] \\ &\stackrel{1.}{\leq} \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|] = \sqrt{\left(\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|]\right)^2} \leq \sqrt{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]}, \end{aligned}$$

wobei für die erste Ungleichung die Monotonie des Erwartungswerts (beachte:  $X - m \leq |X - m|$  und  $-(X - m) \leq |X - m|$ ) und für die letzte Ungleichung die Cauchy-Schwarz-Ungleichung verwenden.