

Statistik für Informatiker, SS 2018

1 Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit, gemeinsame Verteilung

1.3.5 Faltung

Matthias Birkner

<http://www.staff.uni-mainz.de/birkner/StatInf018/>



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

14.5.2018

Faltung

Definition 1.61

X und Y unabhängige reellwertige ZVn, $X \sim \mu$, $Y \sim \nu$
(definiert auf demselben W'raum).

Die Verteilung von $X + Y$ heißt die *Faltung* von μ und ν ,
geschrieben $\mu * \nu$:

$$(\mu * \nu)(B) = P(X + Y \in B), \quad B \subset \mathbb{R}$$

Faltung

Definition 1.61

X und Y unabhängige reellwertige ZVn, $X \sim \mu$, $Y \sim \nu$
(definiert auf demselben W -raum).

Die Verteilung von $X + Y$ heißt die *Faltung* von μ und ν ,
geschrieben $\mu * \nu$:

$$(\mu * \nu)(B) = P(X + Y \in B), \quad B \subset \mathbb{R}$$

Bemerkung. $\mu * \nu = \nu * \mu$ (denn $X + Y = Y + X$).

Beobachtung 1.62 (Diskreter Fall)

Falls $\mu(\mathbb{Z}) = \nu(\mathbb{Z}) = 1$ (d.h. X und Y haben Werte in \mathbb{Z}), so ist

$$\begin{aligned}(\mu * \nu)(\{k\}) &= P(X + Y = k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} P(X = m, Y = k - m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mu(\{m\})\nu(\{k - m\}).\end{aligned}$$

Im allg. diskreten Fall $P(X \in \{x_i, i \in \mathbb{N}\}, Y \in \{y_j, j \in \mathbb{N}\}) = 1$ muss man die „Doppelsumme“ betrachten:

$$P(X + Y = z) = \sum_{i, j: x_i + y_j = z} P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

Beispiel 1.63

- ① W_1, W_2 unabhängige 6-er Würfelwürfe, dann ist

$$S := W_1 + W_2 \sim \text{Unif}_{\{1,2,\dots,6\}} * \text{Unif}_{\{1,2,\dots,6\}}$$

mit

$$\begin{aligned} P(S = k) &= \sum_{m=\max\{k-6,1\}}^{\min\{k-1,6\}} P(W_1 = m)P(W_2 = k - m) \\ &= \frac{1}{36} (\min\{k - 1, 6\} - \max\{k - 6, 1\} + 1) \\ &= \frac{6 - |7 - k|}{36} \end{aligned}$$

für $k \in \{2, 3, \dots, 12\}$

Beispiel 1.63 (Fortsetzung)

- ② X, Y u.a., $\sim \text{Ber}_p$, so ist $X + Y \sim \text{Bin}_{2,p}$, d.h.
 $\text{Ber}_p * \text{Ber}_p = \text{Bin}_{2,p}$.

Beispiel 1.63 (Fortsetzung)

- ② X, Y u.a., $\sim \text{Ber}_p$, so ist $X + Y \sim \text{Bin}_{2,p}$, d.h.
 $\text{Ber}_p * \text{Ber}_p = \text{Bin}_{2,p}$.
- ③ (Binomialfamilie) X_1, X_2, \dots, X_n u.a., $\sim \text{Ber}_p$, so ist
 $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Bin}_{n,p}$, d.h.

$$\text{Ber}_p^{*n} = \underbrace{\text{Ber}_p * \text{Ber}_p * \dots * \text{Ber}_p}_{n\text{-mal}} = \text{Bin}_{n,p}.$$

Insbes.

$$\text{Bin}_{n_1,p} * \text{Bin}_{n_2,p} = \text{Bin}_{n_1+n_2,p} \quad \text{für } p \in [0, 1], n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

die Binomialverteilungen bilden (für festes p) eine *Faltungsfamilie*.

Beispiel 1.63 (Fortsetzung)

- ② X, Y u.a., $\sim \text{Ber}_p$, so ist $X + Y \sim \text{Bin}_{2,p}$, d.h.
 $\text{Ber}_p * \text{Ber}_p = \text{Bin}_{2,p}$.
- ③ (Binomialfamilie) X_1, X_2, \dots, X_n u.a., $\sim \text{Ber}_p$, so ist
 $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Bin}_{n,p}$, d.h.

$$\text{Ber}_p^{*n} = \underbrace{\text{Ber}_p * \text{Ber}_p * \dots * \text{Ber}_p}_{n\text{-mal}} = \text{Bin}_{n,p}.$$

Insbes.

$$\text{Bin}_{n_1,p} * \text{Bin}_{n_2,p} = \text{Bin}_{n_1+n_2,p} \quad \text{für } p \in [0, 1], n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

die Binomialverteilungen bilden (für festes p) eine *Faltungsfamilie*.

(Schreibe $S_1 := X_1 + \dots + X_{n_1} \sim \text{Bin}_{n_1,p}$,
 $S_2 := X_{n_1+1} + X_{n_1+2} + \dots + X_{n_1+n_2} \sim \text{Bin}_{n_2,p}$, so ist
 $S_1 + S_2 = X_1 + \dots + X_{n_1+n_2} \sim \text{Bin}_{n_1+n_2,p}$.)

Beispiel 1.63 (Fortsetzung)

- ④ (Poissonfamilie) Für $\alpha, \beta > 0$ ist $\text{Poi}_\alpha * \text{Poi}_\beta = \text{Poi}_{\alpha+\beta}$, denn

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^k e^{-\alpha} \frac{\alpha^m}{m!} \cdot e^{-\beta} \frac{\beta^{k-m}}{(k-m)!} &= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \alpha^m \beta^{k-m} \\ &= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{(\alpha + \beta)^k}{k!} \\ &= \text{Poi}_{\alpha+\beta}(\{k\}), \quad k \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Auch die Poissonverteilungen bilden eine Faltungsfamilie.

Beobachtung 1.64 (Faltung von Dichten)

X, Y u.a. reellwertige ZVn mit Dichte f_X bzw. f_Y , so hat $X + Y$ die Dichte

$$(f_X * f_Y)(z) := \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z - x) dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Beobachtung 1.64 (Faltung von Dichten)

X, Y u.a. reellwertige ZVn mit Dichte f_X bzw. f_Y , so hat $X + Y$ die Dichte

$$(f_X * f_Y)(z) := \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z - x) dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{x+y \leq w\}} f_X(x) f_Y(y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{x+z-x \leq w\}} f_X(x) f_Y(z-x) dz dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{z \leq w\}} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx dz \\ &= \int_{-\infty}^w (f_X * f_Y)(z) dz \end{aligned}$$

wobei wir in der 2. Zeile $y = z - x$ substituiert haben.

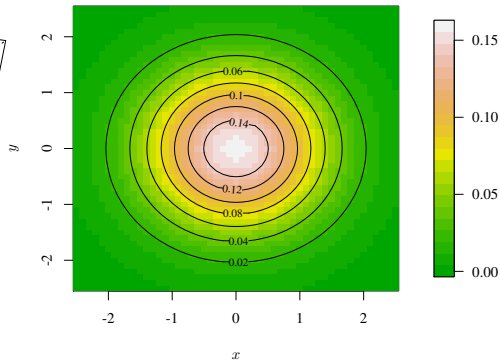
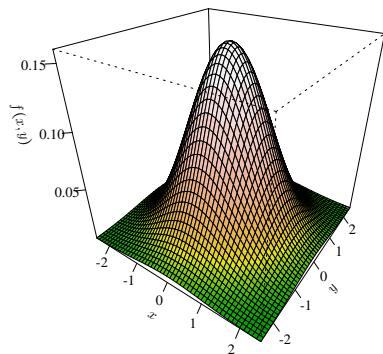
Beispiel 1.65 (Die Normalverteilungen bilden eine Faltungsfamilie)

Es gilt

$$\mathcal{N}_{\mu_1, \sigma_1^2} * \mathcal{N}_{\mu_2, \sigma_2^2} = \mathcal{N}_{\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad \text{für } \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0$$

Erinnerung. Die 2-dimensionale Standard-Normalverteilung hat Dichte

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)$$



Zum Beweis von Bsp. 1.65:

Seien $a, b \in (0, 1)$ mit $a^2 + b^2 = 1$, so ist die 2×2 -Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{orthogonal}$$

Dies ist eine Drehmatrix, wir könnten $a = \cos(\varphi)$, $b = \sin(\varphi)$ für ein geeign. $\varphi \in [-\pi, \pi)$ schreiben, und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ba \\ -ba + ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Zum Beweis von Bsp. 1.65:

Seien $a, b \in (0, 1)$ mit $a^2 + b^2 = 1$, so ist die 2×2 -Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{orthogonal}$$

Dies ist eine Drehmatrix, wir könnten $a = \cos(\varphi)$, $b = \sin(\varphi)$ für ein geeign. $\varphi \in [-\pi, \pi)$ schreiben, und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ba \\ -ba + ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Seien Z_1, Z_2 u.a., $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, dann haben nach Beob. 1.42

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aZ_1 + bZ_2 \\ -bZ_1 + aZ_2 \end{pmatrix}$$

dieselbe Verteilung

Zum Beweis von Bsp. 1.65:

Seien $a, b \in (0, 1)$ mit $a^2 + b^2 = 1$, so ist die 2×2 -Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{orthogonal}$$

Dies ist eine Drehmatrix, wir könnten $a = \cos(\varphi)$, $b = \sin(\varphi)$ für ein geeign. $\varphi \in [-\pi, \pi)$ schreiben, und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ba \\ -ba + ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Seien Z_1, Z_2 u.a., $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, dann haben nach Beob. 1.42

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aZ_1 + bZ_2 \\ -bZ_1 + aZ_2 \end{pmatrix}$$

dieselbe Verteilung, d.h. auch $aZ_1 + bZ_2$ und $-bZ_1 + aZ_2$ sind u.i.v., $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, insbesondere ist $aZ_1 + bZ_2$ standard-normalverteilt.

Zum Beweis von Bsp. 1.65:

Setzen wir $a := \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$, $b := \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$, so finden wir:

$X_1 := \sigma_1 Z_1 \sim \mathcal{N}_{0, \sigma_1^2}$, $X_2 := \sigma_2 Z_2 \sim \mathcal{N}_{0, \sigma_2^2}$ (und X_1, X_2 sind u.a.),

$$\frac{X_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} + \frac{X_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = aZ_1 + bZ_2 \sim \mathcal{N}_{0,1},$$

also gilt $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}_{0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

(Man kann – anstelle von Beob. 1.42 – in diesem Fall auch das Faltungsintegral explizit ausrechnen, vgl. Notizen)