Ein Nachtrag zu stochastischen Differentialgleichungen

Matthias Birkner

Stochastik III, SS 2012

Satz 18. *Seien $b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und höchstens linear wachsend, d.h. $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $|b(x)| + |\sigma(x)| \le K(1 + |x|)$ mit einem $K < \infty$. Dann hat die stochastische Differentialgleichung*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \tag{1}$$

mit $X_0 = x_0$ für jeden Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ (mindestens) eine schwache Lösung.

Beweis. Die Idee ist, eine Approximation mittels Euler(-Maruyama)-Schema zu konstruieren, Straffheit der Folge auf dem Pfadraum (via Kolmogorovs Momentenkriterium) zu zeigen und dann eine konvergente Teilfolge auszuwählen; der Limesprozess löst dann das zugehörige Martingalproblem. Dieser Ansatz geht auf D. Stroock und S. Varadhan, 1969, zurück.

1. Schritt Für $N \in \mathbb{N}$, $t \ge 0$ sei $[t]_N := 2^{-N}\lfloor 2^N t\rfloor$, sei B Standard-Brownsche Bewegung, Y davon unabhängige, reelle ZV. Die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t^{(N)} = b(X_{[t]_N}^{(N)})dt + \sigma(X_{[t]_N}^{(N)})dB_t \tag{2}$$

mit $X_0^{(N)} = Y$ hat die eindeutige „explizite“ (starke) Lösung

$$X_t^{(N)} = X_{[t]_N}^{(N)} + b(X_{[t]_N}^{(N)})\big(t - [t]_N\big) + \sigma(X_{[t]_N}^{(N)})\big(B_t - B_{[t]_N}\big). \tag{3}$$

Zeige: Für $T > 0$, $p > 1$ gibt es ein $C = C(T, p, K)$ so dass

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t} |X_s^{(N)}|^{2p}\right] \le C\big(1 + \mathbb{E}\big[|Y|^{2p}\big]\big)e^{Ct}, \quad 0 \le t \le T, \quad \text{und} \tag{4}$$

$$\mathbb{E}\left[|X_t^{(N)} - X_s^{(N)}|^{2p}\right] \le C(1 + e^{CT})\big(1 + \mathbb{E}\big[|Y|^{2p}\big]\big)(t-s)^p, \quad 0 \le s \le t \le T \tag{5}$$

(insbesondere sind die Schranken nicht von N abhängig). Dazu schreibe $|X^{(N)}|_t^* := \sup_{s\le t} |X_s^{(N)}|$, $M_t^{(N)} := \int_0^t \sigma(X_{[s]_N}^{(N)})dB_s$, es gilt

$$|X_t^{(N)}|^{2p} \le 3^{2p}|Y|^{2p} + 3^{2p}\left|\int_0^t b(X_{[s]_N}^{(N)})\,ds\right|^{2p} + 3^{2p}\left|\int_0^t \sigma(X_{[s]_N}^{(N)})dB_s\right|^{2p} \tag{6}$$

Für den mittleren Term beachte mit der Jensenschen Ungleichung

$$\left|\int_0^t b(X_{[s]_N}^{(N)})\,ds\right|^{2p} = t^{2p}\left|\frac{1}{t}\int_0^t b(X_{[s]_N}^{(N)})\,ds\right|^{2p} \le t^{2p-1}\int_0^t \left|b(X_{[s]_N}^{(N)})\right|^{2p} ds \le t^{2p-1}(2K)^{2p}\int_0^t 1 + \left(|X^{(N)}|_s^*\right)^{2p} ds, \tag{7}$$

für den dritten Term beachte, dass $M^{(N)}$ ein (lokales) Martingal ist, mit der BDG-Ungleichung folgt (mit einem $c_p < \infty$)

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}|M_s^{(N)}|^{2p}\right] \le c_p\mathbb{E}\left[\left(\langle M^{(N)}\rangle_t\right)^p\right] = c_p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma^2(X_{[s]_N}^{(N)})ds\right)^p\right] = c_p t^p\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{t}\int_0^t \sigma^2(X_{[s]_N}^{(N)})ds\right)^p\right] \tag{8}$$

$$\le c_p t^{p-1}\int_0^t \mathbb{E}\left[\sigma^{2p}(X_{[s]_N}^{(N)})\right] ds \le c_p(2K)^p t^{p-1}\int_0^t 1 + \mathbb{E}\left[\left(|X^{(N)}|_s^*\right)^{2p}\right] ds. \tag{9}$$

Insgesamt ergibt sich damit aus (6) mit einem $\widetilde{C} < \infty$ für $t \le T$

$$\mathbb{E}\left[\left(|X^{(N)}|_t^*\right)^{2p}\right] \le \widetilde{C}\Big(\mathbb{E}\left[|Y|^{2p}\right] + t^{p-1}\int_0^t 1 + \mathbb{E}\left[\left(|X^{(N)}|_s^*\right)^{2p}\right] ds\Big), \tag{10}$$

für $f_N(t) := \mathbb{E}\left[\left(|X^{(N)}|_t^*\right)^{2p}\right]$ gilt also (mit entsprechend angepasstem $C < \infty$)

$$f_N(t) \le C\left(1 + \mathbb{E}\left[|Y|^{2p}\right]\right) + C\int_0^t f_N(s)\, ds, \tag{11}$$

woraus (4) mittels Gronwall-Ungleichung folgt.

Um (5) zu beweisen betrachten wir für eine Wahl von $0 \le s \le t \le T$: $\widetilde{X}_r := X_{s+r}^{(N)} - X_s^{(N)}$, $0 \le r \le t - s$ (insbesondere $\widetilde{X}_0 = 0$) und wenden (10) auf $\widetilde{X}_{t-s}$ an:

$$\mathbb{E}\left[|X_t^{(N)} - X_s^{(N)}|^{2p}\right] = \mathbb{E}\left[|\widetilde{X}_{t-s}|^{2p}\right] \le \widetilde{C}(t-s)^{p-1}\int_0^{t-s} 1 + \mathbb{E}\left[\left(|\widetilde{X}|_r^*\right)^{2p}\right] dr \tag{12}$$

$$\le \widetilde{C}(t-s)^p\left(1 + 2^p\mathbb{E}\left[\left(|X^{(N)}|_T^*\right)^{2p}\right]\right) \tag{13}$$

2. Schritt Sei $P_N := \mathcal{L}(X^{(N)}) \in \mathcal{M}_1\big(C([0,\infty),\mathbb{R})\big)$ (wir statten $C([0,\infty),\mathbb{R})$ mit einer Metrik aus, die die lokal gleichmäßige Konvergenz metrisiert).

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli sind Mengen von Funktionen des Typs

$$A_{\alpha,C_1,C_2} := \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{R} : \sup_{t \le T} |f(t)| \le C_1,\ \sup_{0 \le s < t \le T} |f(t) - f(s)|/(t-s)^\alpha \le C_2 \right\} \tag{14}$$

mit $\alpha \in (0,1], C_1, C_2 < \infty$ kompakt in $C([0,T],\mathbb{R})$. Aus (4), (5) und Kolmogorovs Momentenkriterium ergeben sich für $\alpha \in (0,1/2)$, $\varepsilon > 0$ Konstanten $C_1, C_2 < \infty$, so dass

$$\inf_{N \in \mathbb{N}} P_N(A_{\alpha,C_1,C_2}) > 1 - \varepsilon. \tag{15}$$

Demnach ist die Familie P_N (zunächst eingeschränkt auf das Zeitintervall $[0,T]$) straff, mit dem Satz von Prohorov gibt es eine schwach konvergente Teilfolge. Lasse T längs $\mathbb{N}$ divergieren, ein Diagonalisierungsargument zeigt:

$$P = w - \lim\nolimits_{k\to\infty} P_{N_k} \quad \text{existiert für eine Teilfolge } N_k \tag{16}$$

3. Schritt Setze den Startpunkt $Y := x_0$ in obiger Konstruktion. P löst das Martingalproblem MP(σ^2, b, x_0): Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R})$. Nach Konstruktion ist für jedes N der Prozess

$$M_t^{f,N} := f(X_t^{(N)}) - f(x_0) - \int_0^t b(X_{[s]_N}^{(N)})f'(X_s^{(N)}) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_{[s]_N}^{(N)})f''(X_s^{(N)})\, ds \tag{17}$$

ein Martingal, d.h. für $0 \le s_1 < \cdots < s_m \le s < t$, $g_1, \ldots, g_m \in C_b(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathbb{E}\left[\left(M_t^{f,N} - M_s^{f,N}\right)\prod_{j=1}^m g_j(X_{s_j}^{(N)})\right] = 0. \tag{18}$$

Daraus ergibt sich (mit der Stetigkeit von b, σ und (4), um gleichgradige Integrierbarkeit sicherzustellen) mit (16) auch

$$\mathbb{E}_P\left[\left(f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t b(X_u)f'(X_u) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_u)f''(X_u)\, du\right)\prod_{j=1}^m g_j(X_{s_j})\right] = 0, \tag{19}$$

d.h. P löst $\mathrm{MP}(\sigma^2,\, b,\, x_0)$.

4. Schritt Mit Satz 16 der Vorlesung erhalten wir aus der Lösung von $\mathrm{MP}(\sigma^2,\, b,\, x_0)$ eine schwache Lösung von (1). $\square$

Bemerkung. Der Beweis funktioniert ebenso (mit leicht höherem Notationsaufwand) für Prozesse in $\mathbb{R}^d$.

Eine stochastische Differentialgleichung wie (1) heißt *pfadweise eindeutig* (auch: stark eindeutig), wenn für je zwei Lösungen (X, B) und (X', B) auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (und mit derselben Brownschen Bewegung B) gilt $\mathbb{P}(X_t = X'_t\, \forall\, t \geq 0) = 1$. Sie heißt *in Verteilung eindeutig* (auch: schwach eindeutig), wenn für je zwei Lösungen (X, B) und (X', B') auf möglicherweise verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen gilt $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X')$.

Bericht 19 (T. Yamada & S. Watanabe, 1971)
1) Gilt für stochastische Differentialgleichung wie (1) pfadweise Eindeutigkeit, so gilt auch Eindeutigkeit in Verteilung.

2) Eine pfadweise eindeutige SDGl, die eine schwache Lösung besitzt, besitzt auch (zu beliebig vorgegebener Brownscher Bewegung) eine eindeutige starke Lösung.

Der Beweis benutzt die (intuitiv plausible (?)) Idee, (X, B) als ein zweistufiges Experiment zu realisieren: Generiere zunächst eine Brownsche Bewegung B, dann X gemäß $P(X|B)$ mit Hilfe eines geeigneten Übergangskerns. Eine analoge Konstruktion für (X', B') mit $P'(X'|B')$ gestattet dann, X und X' auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum zu realisieren und so die pfadweise Eindeutigkeit auszunutzen. Die technischen Details der Messbarkeitskonstruktion sind zu aufwendig, um hier wiedergegeben zu werden, siehe z.B. Rogers & Williams, Vol. 2, Kap. V.17 oder Karatzas & Shreve, Kap. 5.3.D.

Nachtrag zu Satz 13. Satz 18 und Bericht 19 zeigen den bisher im Verlauf der Vorlesung fehlenden Beweis der Existenzaussage in Satz 13.