

Aufgabe 1.1 Für $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und differenzierbares $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[Zf(Z)] = \mathbb{E}[f'(Z)]$$

(sofern $Zf(Z)$ und $f'(Z)$ integrierbar sind), insbesondere gilt

$$\mathbb{E}[Z^{2n}] = (2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 1.2 Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung.

a) Zeigen Sie: $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal und für $a, b > 0$ gilt mit $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \text{ oder } B_t = b\}$

$$\mathbb{P}(B_\tau = b) = \frac{a}{a + b}, \quad \mathbb{E}[\tau] = ab.$$

b) Zeigen Sie: Für $\sigma \in \mathbb{R}$ ist $(\exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t))_{t \geq 0}$ ein Martingal, und für $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, gilt

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_a}] = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}.$$

c) Folgern Sie aus b): τ_a ist (einseitig strikt) stabil zum Index $1/2$ mit Lévy-Maß $\nu(dy) = (|a|/\sqrt{2\pi})y^{-3/2}\mathbf{1}_{(0, \infty)}(y) dy$, die Dichte von τ_a ist

$$\frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/(2t)} t^{-3/2}, \quad t > 0.$$

d) Seien $a, b > 0$, $\tilde{\tau}_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : B_t - at = b\}$ ($\tilde{\tau}_{a,b}$ ist Stopzeit mit Werten in $[0, \infty]$). Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \tilde{\tau}_{a,b}}] = \exp(-ab - b\sqrt{a^2 + 2\lambda}), \quad \lambda \geq 0$$

und folgern Sie

$$\mathbb{P}(\tilde{\tau}_{a,b} < \infty) = e^{-2ab}, \quad \text{sowie } \sup\{B_t - at : t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \text{Exp}(2a).$$

Aufgabe 1.3 Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ Brownsche Bewegung, $t > 0$, für $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ sei $s(n, m) := tm/2^n$ und $D_{n,m} := B_{s(n,m)} - B_{s(n,m-1)}$.

a) Zeigen Sie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 - t\right)^2\right] < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 = t \quad \text{f.s.}$$

[*Hinweis.* Verwenden Sie die Chebyshev-Ungleichung, um aus der linken Abschätzung zu folgern, dass $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 - t\right| > \varepsilon\right) < \infty$ für jedes $\varepsilon > 0$, dann ein Borel-Cantelli-Lemma.]

b) Folgern Sie: Für $\gamma > 1/2$ ist

$$\sup_{0 \leq u < v \leq t} \frac{|B_v - B_u|}{(v - u)^\gamma} = \infty \quad \text{f.s.},$$

d.h. die Pfade sind auf $[0, t]$ f.s. nicht Hölder-stetig der Ordnung γ .

[*Hinweis.* Auf dem Ereignis $\{\sup_{0 \leq u < v \leq t} |B_v - B_u|/(v - u)^\gamma < c\}$ gilt $\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 \leq 2^n \times (ct^\gamma 2^{-n\gamma})^2 = c^2 t^{2\gamma} 2^{n(1-2\gamma)}$, was a) widerspricht.]