Übungen zur Stochastik III SS 2016

Blatt 4

Aufgabe 4.1 Führen Sie die Argumente für Proposition 2.38 (Eigenschaften des stochastischen Integrals bezüglich lokalen Martingalen) und Proposition 2.39 (Charakterisierung des stochastischen Integrals bezüglich eines lokalen Martingals via Kovariation) aus der Vorlesung explizit aus.

Aufgabe 4.2 a) Für $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$ ist auch $X_t := M_t^2 - M_0^2 - \langle M \rangle_t$ ein stetiges lokales Martingal. Wenn zusätzlich gilt $\mathbb{E}[M_0^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t] < \infty$ für jedes $t \geqslant 0$, so ist $M \in \mathcal{M}^c_2$.

b) Können Sie ein stetiges (lokales) Martingal M und eine f.s. endliche Stoppzeit τ (auf einem geeigneten filtrierten W'raum) finden, so dass $\mathbb{E}[\langle M \rangle_\tau] = \infty$ gilt aber auch aber $\mathbb{E}[M_\tau^2] < \infty$?

c) Können Sie ein stetiges (lokales) Martingal M und zwei f.s. endliche Stoppzeiten $\sigma \leqslant \tau$ finden mit $\mathbb{E}[|M_\tau|] < \infty$ aber $\mathbb{E}[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \neq M_\sigma$?

[*Hinweis.* Für b) und c) kann man die Brownsche Bewegung und geeignete Stoppzeiten verwenden.]

Aufgabe 4.3 Sei $(B_t)_{t \geqslant 0}$ eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung. In Aufgabe 2.1 hatten wir insbesondere gesehen, dass $B_t^2 - t$ ein Martingal ist. Hier geht es um entsprechende Ausdrücke mit höheren Potenzen.

Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$h_n(x) := (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

das n-te Hermite-Polynom ($h_1(x) = x$, $h_2(x) = x^2 - 1$, $h_3(x) = x^3 - x - 3$, ...) und

$$M_t^{(n)} := t^{n/2} h_n(B_t/\sqrt{t}).$$

Zeigen Sie: Es ist $M_t^{(n)} = n \int_0^t M_s^{(n-1)}\, dB_s$, also

$$M_t^{(n)} = n! \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} dB_{s_n} \ldots dB_{s_2}\, dB_{s_1}$$

und $(M_t^{(n)})_{t \geqslant 0}$ ist ein Martingal.

[*Hinweis.* Sei $H_n(x,y) := y^{n/2} h_n(x/y)$ für $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$ (stetig fortgesetzt mit $H_n(x,0) = x^n$), dann gilt $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n + \frac{\partial}{\partial y} H_n = 0$ und $\frac{\partial}{\partial x} H_n = n H_{n-1}$. Verwenden Sie die zeitabhängige Itō-Formel. Für die Martingaleigenschaft zeigen Sie (z.B. mit dem Spiegelungsprinzip), dass $\mathbb{E}\big[\sup_{s \leqslant t} |B_s|^p\big] < \infty$ für alle $t \geqslant 0$, $p \geqslant 0$ gilt.]