Übungen zur Stochastik II **WS 2011/2012**

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 7

Aufgabe 7.1 Sei C eine symmetrische, reelle, positiv semidefinite $d \times d$-Matrix, $\mu \in R^d$, $X \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ und A eine reelle $m \times d$-Matrix. Dann hat $Y := AX$ Verteilung $\mathcal{N}(A\mu, ACA^t)$.

Aufgabe 7.2 (Lokaler zentraler Grenzwertsatz) Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. $\mathbb{Z}$-wertige ZVn mit $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ und $0 < \sigma^2 := \mathrm{Var}[X_1] < \infty$, und es gelte

$$\mathrm{ggt}\big\{i - j : i, j \in \mathbb{Z},\, \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_1 = j) > 0\big\} = 1.$$

a) Zeigen Sie: Dann gilt für $\varepsilon \in (0, \pi)$

$$\sup_{\varepsilon \le |t| \le \pi} |\varphi_{X_1}(t)| < 1.$$

[*Hinweis.* Zeigen Sie, dass $|\varphi_{X_1}(t)| = 1$ impliziert, dass $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ gilt.]

b) Sei weiter $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Dann gilt für jedes $K \in (0, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}, |k - n\mu| \le K\sigma\sqrt{n}} \Big| \sqrt{2\pi n\sigma^2}\, \mathbb{P}(S_n = k) - \exp\big(-(k-n\mu)^2/(2n\sigma^2)\big)\Big| = 0.$$

[*Hinweis.* Verwenden Sie die diskrete Fourier-Umkehrformel (Aufg. 6.1) und eine Taylorentwicklung von $\varphi_{X_1}(t)$ um $t = 0$. Verwenden Sie Teil a), um Beiträge zum Umkehrintegral ausserhalb einer geeignet gewählten Umgebung der 0 abzuschätzen.]

Aufgabe 7.3 a) Sei X eine reellwertige, unendlich teilbare ZV mit $\mathbb{P}(|X| \le K) = 1$ für ein $K \in (0, \infty)$. Dann ist X f.s. konstant.

b) Sei $\alpha > 2$. Es gibt kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit charakteristischer Funktion $t \mapsto e^{-|t|^\alpha}$.

[*Hinweis.* Argumentieren Sie beispielsweise per Widerspruch: Nehmen Sie an, X hätte $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$, und bestimmen Sie Mittelwert und Varianz von X.]

Aufgabe 7.4 Die negative Binomialverteilung mit Parametern $r > 0$, $p \in (0,1)$ hat Gewichte

$$b^-_{r,p}(k) = \binom{-r}{k}(-1)^k p^r (1-p)^k, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

(wobei $\binom{-r}{k} = (-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)/k!$; für $r \in \mathbb{N}$ is $b^-_{r,p}$ die Verteilung der Anzahl Misserfolge in einer p-Münzwurffolge vor dem r-ten Erfolg). Stellen Sie $b^-_{r,p}$ als CPoi_ν für ein geeignetes $\nu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{Z}_+)$ dar und folgern Sie, dass $b^-_{r,p}$ unendlich teilbar ist.

Aufgabe 7.5* Sei $(X_{n,\ell}, 1 \le \ell \le k_n, n \in \mathbb{N})$ ein asymptotisch vernachlässigbares Dreiecksschema, d.h. für jedes n sind $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,k_n}$ u.a. und es gilt $\lim_{n\to\infty} \max_{1 \le \ell \le k_n} \mathbb{P}(|X_{n,\ell}| > \varepsilon) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$. Falls für eine reelle ZV S gilt

$$X_{n,1} + X_{n,2} + \cdots + X_{n,k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} S,$$

so ist S unendlich teilbar.

Abgabe der Aufgaben: Keine