Übungen zur Stochastik II — WS 2011/2012

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 9

Aufgabe 9.1 Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. mit Werten in $\mathbb{Z}$, $p(x) := \mathbb{P}(X_1 = x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Wir setzen $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $\mathcal{F}_n := \sigma(S_1, \dots, S_n)$, $M_n := \max_{0 \leqslant j \leqslant n} S_j$, $Z_n := M_n - S_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Zeigen Sie:

a) $(M_n)_{n=0,1,2,\dots}$ ist kein Markovprozess (bezüglich irgendeiner Filtration).

b) $(M_n, S_n)_{n=0,1,2,\dots}$ ist ein Markovprozess mit Werten in $\mathbb{Z}^2$ (bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,2,\dots}$). Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}\big((M_{n+1}, S_{n+1}) = (x', y') \,\big|\, (M_n, S_n) = (x, y)\big)$, $x, y, x', y' \in \mathbb{Z}$.

c) $(Z_n)_{n=0,1,2,\dots}$ ist ein Markovprozess mit Werten in $\mathbb{Z}_+$ bezüglich der von (Z_n) erzeugten Filtration.

Aufgabe 9.2 (Für einen Markovprozess sind Vergangenheit und Zukunft u.a. gegeben die Gegenwart) Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $(X_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozess. Für $t \in I$ sei

$$\mathscr{F}_{\leqslant t} := \sigma\big(X_s : s \in I, s \leqslant t\big), \qquad \mathscr{F}_{\geqslant t} := \sigma\big(X_s : s \in I, s \geqslant t\big).$$

Zeigen Sie: X besitzt die (elementare) Markoveigenschaft genau dann, wenn gilt

$$\forall\, t \in I \ : \ \mathscr{F}_{\leqslant t} \text{ und } \mathscr{F}_{\geqslant t} \text{ sind bedingt auf } \sigma(X_t) \text{ unabhängig.}$$

Aufgabe 9.3 Sei $N \in \mathbb{N}$, $Y_1, Y_2, \dots$ seien u.i.v. mit uniformer Verteilung auf $\{1, \dots, N\}$, $M_n := \#\{Y_1, \dots, Y_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

a) Zeigen Sie: $(M_n)_{n=0,1,2,\dots}$ ist eine Markovkette. Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten.

b) Sei $\tau := \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : M_k = N\}$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[\tau]$.

Aufgabe 9.4* (Reguläre bedingte Verteilung für ZVn mit Werten in einem Borelschen Raum) Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, darauf Y eine Zufallsvariable mit Werten in einem Borelschen Raum $(S, \mathscr{B})$, $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ eine Teil-σ-Algebra. Dann existiert eine reguläre Version der bedingten Verteilung von Y gegeben $\mathscr{F}$, d.h. ein stochastischer Kern $\kappa_{Y|\mathscr{F}}$ von $(\Omega, \mathscr{F})$ nach $(S, \mathscr{B})$ so dass für alle $C \in \mathscr{B}$ gilt

$$\kappa_{Y|\mathscr{F}}(\cdot, C) = \mathbb{E}[1_C(Y)|\mathscr{F}] \quad \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

[*Hinweis.* Zeigen Sie die Aussage zunächst für $S = \mathbb{R}$ (mit Borel-σ-Algebra), gehen Sie beispielsweise folgendermaßen vor: Definieren Sie für $r \in \mathbb{Q}$ Zufallsvariablen $F(r)$ mit $F(r) = \mathbb{E}[1_{(-\infty,r]}(Y)|\mathscr{F}]$ für ω außerhalb einer $\mathbb{P}$-Nullmenge, die nicht von $r \in \mathbb{Q}$ abhängt. Sei $\tilde{F}$ die rechtsstetige Fortsetzung von F als Funktion auf $\mathbb{R}$ (und auf obiger Nullmenge eine beliebige Verteilungsfunktion). Zeigen Sie, dass $\tilde{F}$ für jedes ω eine Verteilungsfunktion ist, die somit ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\kappa_{Y|\mathscr{F}}(\omega, \cdot)$ auf $\mathbb{R}$ bestimmt. $\kappa_{Y|\mathscr{F}}$ hat die gewünschten Eigenschaften. Um die erforderlichen Messbarkeitseigenschaften nachzuweisen, ist es hilfreich, sich auf die Menge der Halbintervalle $(-\infty, r]$, $r \in \mathbb{Q}$ zurückzuziehen, die eine schnittstabile Erzeugermenge von $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ bilden.]

Aufgabe 9.5* (Satz von Ionescu-Tulcea) Seien $(\Omega_n, \mathscr{A}_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ messbare Räume, $\Omega^{(n)} := \bigtimes_{j=0}^{n} \Omega_j$, $\mathscr{A}^{(n)} := \bigotimes_{j=0}^{n} \mathscr{A}_j$, $\Omega := \bigtimes_{j=0}^{\infty} \Omega_j$, $\mathscr{A} := \bigotimes_{j=0}^{\infty} \mathscr{A}_j$. Sei weiter P_0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$, für $n = 1, 2, \ldots$ sei κ_n ein stochastischer Kern von $(\Omega^{(n-1)}, \mathscr{A}^{(n-1)})$ nach $(\Omega_n, \mathscr{A}_n)$. Dann ist $P_n := P_0 \otimes \kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_n$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega^{(n)}, \mathscr{A}^{(n)})$.

Zeigen Sie: Es gibt genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathscr{A})$ mit

$$P\Big(B \times \bigtimes_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j\Big) = P_n(B) \quad \text{für alle } B \in \mathscr{A}^{(n)}. \tag{$*$}$$

[*Hinweis.* Die Menge der Zylindermengen (mit endlicher Basis)

$$\mathscr{C} := \Big\{B \times \bigtimes_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j : n \in \mathbb{N}, B \in \mathscr{A}^{(n)}\Big\}$$

ist eine Algebra, die $\mathscr{A}$ erzeugt, und $(*)$ definiert darauf einen Wahrscheinlichkeitsinhalt P. Zeigen Sie, dass P σ-additiv ist, und benutzen Sie dann Carathéodorys Maßfortsetzungssatz. Für die σ-Additivität genügt es zu zeigen, dass P absteigend stetig bei $\varnothing$ ist.

Dazu können Sie beispielsweise folgendermaßen vorgehen: Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{C}$ mit $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ und $\inf_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) =: \alpha > 0$. Es genügt zu zeigen, dass dann $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$ gilt. Sei o.E. (warum?) $A_n = A_n' \times \bigtimes_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j$ mit $A_n' \in \mathscr{A}^{(n)}$. Sei

$$h_{m,n}(\omega_0, \ldots, \omega_m) := \Big(\bigotimes_{j=m+1}^{n} \kappa_j\Big)\big((\omega_0, \ldots, \omega_m), A_n'\big) \quad \text{für } m \leqslant n,\ \omega_i \in \Omega_i, i = 0, \ldots, m.$$

Dann ist $h_{m,m} = \mathbf{1}_{A_m'}$ und $h_{m,n} \geqslant h_{m,n+1} \geqslant \cdots \geqslant h_m := \inf_{n \geqslant m} h_{m,n}$, und es gilt $\int h_m \, dP_m = \alpha$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie dann induktiv eine Folge $(\tilde\omega_0, \tilde\omega_1, \ldots) \in \Omega$ mit $h_m(\tilde\omega_0, \ldots, \tilde\omega_m) \geqslant \alpha$ für jedes $m \in \mathbb{N}$, und folgern Sie, dass $(\tilde\omega_0, \tilde\omega_1, \ldots) \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$.]

Abgabe der Aufgaben: Keine