Übungen zur Stochastik II — WS 2011/2012

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 11

Aufgabe 11.1 Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, zusammenhängender, ungerichteter Graph, wobei V die Knotenmenge und $E \subset \{k \subset V : \#k = 2 \text{ oder } \#k = 1\}$ die Kantenmenge bezeichnet ($\{x, y\} \in E$, wenn x und y durch eine Kante verbunden sind, $\{x, x\} := \{x\} \in E$, wenn es eine Schleife von x nach x gibt).

Für $x \in V$ sei $d_x := \#\{y \in V : \{x, y\} \in E\}$ die Anzahl Nachbarn (d.h. der Grad) des Knotens x, dann definiert

$$p_{x,y} := \mathbf{1}_{\{\{x,y\}\in E\}} \frac{1}{d_x}, \quad x, y \in V$$

eine stochastische Matrix auf V. Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovkette mit Übergangsmatrix $p = (p_{x,y})$ (die „einfache Irrfahrt auf G“).

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}_x[\min\{n > 0 : X_n = x\}]$ für $x \in V$.

[*Hinweis.* Zeigen Sie: $\mu(\{x\}) := d_x$ ist ein invariantes Maß für p.]

b) Ein Springer beginnt in der linken unteren Ecke eines (8×8-)Schachfelds und führt dann in jedem Zug unter allen am aktuellen Ort erlaubten Sprüngen einen rein zufällig gewählten aus. Wieviele Sprünge dauert es im Mittel, bis er an den Startort zurückkehrt?

Aufgabe 11.2 Sei X diskrete Markovkette auf E mit Übergangsmatrix p, für $x, y \in E$ sei $T^1_y := \min\{n \geqslant 1 : X_n = y\}$, $F(x, y) := \mathbb{P}_x(T^1_y < \infty)$. Zeigen Sie: Wenn x ein positiv rekurrenter Zustand ist und $F(x, y) > 0$ gilt, so ist auch y positiv rekurrent.

Aufgabe 11.3 a) Sei X irreduzible diskrete Markovkette auf E. Es gebe eine Funktion $\varphi : E \to [0, \infty)$ mit $\varphi(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ (in dem Sinne, dass $\#\{x \in E : \varphi(x) \leqslant M\} < \infty$ für jedes $M \in (0, \infty)$ gilt) und eine endliche Teilmenge $F \subset E$, so dass

$$\mathbb{E}_x\big[\varphi(X_1)\big] \leqslant \varphi(x) \quad \text{für alle } x \in E\backslash F.$$

Zeigen Sie: Dann ist X rekurrent.

[*Hinweis.* Sei $\tau := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in F\}$ und $T_M := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \varphi(X_n) \geqslant M\}$. Benutzen Sie die Tatsache, dass $(\varphi(X_{n\wedge\tau}))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal ist, um $\mathbb{P}_x(T_M < \tau)$ abzuschätzen und folgern Sie mittels $M \to \infty$, dass $\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1$ für jedes $x \in E$.]

b) Wenn man in a) die Bedingung $\varphi \to \infty$ durch $\varphi \to 0$ ersetzt (d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\#\{x \in E : \varphi(x) \geqslant \varepsilon\} < \infty$) und $\min_{x\in F} \varphi(x) > 0$ gilt, so ist X transient.

c) Sei X diskrete Markovkette auf $\mathbb{Z}_+$ mit Übergangsmatrix p, wobei

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = 0, j = 1, \\ r_i, & i > 0, j = i + 1, \\ 1 - r_i, & i > 0, j = i - 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für gewisse $r_i \in (0, 1)$ (eine solche Kette heißt auch ein Geburts- und Todesprozess).

Es gelte $r_n = \frac{1}{2} + \epsilon_n$, wobei $\epsilon_n \sim c/n^\alpha$ für ein $c > 0$ und $\alpha \in [0, \infty)$. Zeigen Sie: X ist rekurrent für $\alpha > 1$ und transient für $\alpha < 1$.

[*Hinweis.* Die Funktion $\varphi(0) := 0$, $\varphi(\ell) := \sum_{m=0}^{\ell-1} \prod_{j=1}^{m} \frac{1-r_j}{r_j}$ für $\ell \in \mathbb{N}$ (wobei für $m = 0$ das „leere“ Produkt als 1 interpretiert wird), ist auf $\{1, 2, \dots\}$ harmonisch für X.]

Aufgabe 11.4* (Zeitkontinuierliche Markovketten) Sei E endliche Menge. Eine $E \times E$-Matrix $Q = (q_{x,y})$ heißt *Q-Matrix* oder *Generatormatrix*, wenn gilt

$$q_{x,y} \in [0,\infty) \quad \text{für alle } x \neq y \qquad \text{und} \qquad \sum\nolimits_y q_{x,y} = 0 \quad \text{für alle } x. \tag{1}$$

a) Sei $P(t) = (p_{x,y}(t))_{x,y \in E}$ definiert durch

$$P(t) := \exp(tQ) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k. \tag{2}$$

Dann bildet $(P(t))_{t \geqslant 0}$ eine Halbgruppe von stochastischen Matrizen, d.h. $P(t)P(s) = P(t+s)$, und es gelten die Kolmogorovschen Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t) = P(t)Q, \quad \text{d.h. } \forall\, x,y \in E \ : \ \frac{\partial}{\partial t} p_{x,y}(t) = \sum_z p_{x,z}(t) q_{z,y} = p_{x,y}(t) q_{y,y} + \sum_{z \neq y} p_{x,z}(t) q_{z,y}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t) = QP(t), \quad \text{d.h. } \forall\, x,y \in E \ : \ \frac{\partial}{\partial t} p_{x,y}(t) = \sum_z q_{x,z} p_{z,y}(t) = \sum_z q_{x,z}\big(p_{z,y}(t) - p_{x,y}(t)\big), \tag{4}$$

jeweils mit Startbedingung $P(0) = I$, die Identitätsmatrix auf E.

Insbesondere gibt es einen E-wertigen Markovprozess $(X_t)_{t \geqslant 0}$ mit Verteilungen $\mathbb{P}_x$, $x \in E$, so dass

$$\mathbb{P}_x(X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_k} = x_k) = p_{x,x_1}(t_1) p_{x_1,x_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{x_{k-1},x_k}(t_k - t_{k-1}) \tag{5}$$

für $k \in \mathbb{N}$, $t_1 < \cdots < t_k$, $x, x_1, \ldots, x_k \in E$.

[*Hinweis.* Für die Konvergenz der Reihe in (2) beobachte man beispielsweise, dass die Einträge von Q^k vom Betrag her beschränkt sind durch $(|E| \times \max_{x,y} |q_{x,y}|)^k$, für kommutierende Matrizen A, B gilt $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$.]

b) Sei $\lambda := \max_x\{-q_{x,x}\}$, setze

$$\hat{p}_{x,y} := \frac{q_{x,y}}{\lambda}, \ x \neq y, \quad \hat{p}_{x,x} := 1 + \frac{q_{x,x}}{\lambda}. \tag{6}$$

$(\hat{p}_{x,y})$ ist eine stochastische Matrix auf E. Sei $(\hat{X}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine $\hat{p}$-Markovkette (die unter $\mathbb{P}_x$ in x startet), (N_t) ein davon unabhängiger Poissonprozess auf $\mathbb{R}_+$ mit Rate λ. Dann erfüllt

$$X_t := \hat{X}_{N_t}, \ t \geqslant 0 \tag{7}$$

die Bedingung (5). Für $x, y \in E$ gilt

$$\mathbb{P}_x(X_h = y) = \mathbf{1}_{x=y} + h q_{x,y} + o(h) \quad \text{für } h \downarrow 0. \tag{8}$$

c) Sei $E = \{0,1\}$, $(X_t)_{t \geqslant 0}$ sei Markovkette auf E mit Generatormatrix $Q = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in (0,\infty)$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}_0(X_t = 0) = e^{-(a+b)t} + \big(1 - e^{-(a+b)t}\big)\frac{b}{a+b}, \tag{9}$$

$$\mathbb{P}_1(X_t = 1) = e^{-(a+b)t} + \big(1 - e^{-(a+b)t}\big)\frac{a}{a+b}. \tag{10}$$

[*Hinweis.* Lösen Sie beispielsweise die Kolmogorovschen Rückwärtsgleichungen.]

Abgabe der Aufgaben: Keine