## Übungen zur Stochastik II — WS 2011/2012

Juniorprof. Dr. Matthias Birkner

Serie 13

**Aufgabe 13.1 (Eine Version von Poincarés Wiederkehrsatz)** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \tau)$ ein maßerhaltendes dynamisches System, für $A \in \mathcal{A}$ sei $T_A^1 := \inf\{n > 0 : \tau^n(\omega) \in A\}$.

a) Es gilt $A \subset \{T_A^1 < \infty\}$ $\mathbb{P}$-f.s. und $A \subset \{\tau^n(\omega) \in A \text{ unendlich oft}\}$ $\mathbb{P}$-f.s.

[*Hinweis.* Sei $B := A \cap \{T_A^1 = \infty\}$, dann sind die Mengen $\tau^{-k}(B)$, $k \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt mit $\mathbb{P}(\tau^{-k}(B)) = \mathbb{P}(B)$.]

b) Sei $\tau$ darüberhinaus ergodisch und $\mathbb{P}(A) > 0$, so gilt

$$\mathbb{P}\big(\tau^n(\omega) \in A \text{ unendlich oft}\big) = 1.$$

[*Hinweis.* $C := \{\tau^n(\omega) \in A \text{ unendlich oft}\}$ ist $\tau$-invariant, und $A \subset C$ $\mathbb{P}$-f.s. nach Teil a).]

**Aufgabe 13.2 (Borels Satz von den normalen Zahlen)** Für $x \in (0,1)$ sei $x = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x) 10^{-n}$ mit $z_n(x) \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ die eindeutige nicht-abbrechende Dezimaldarstellung von $x$. $x$ heißt *normal* (zur Basis 10), wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ jeder $k$-Block $b_1, b_2, \ldots, b_k$ von Ziffern in der Dezimaldarstellung mit asymptotischer Häufigkeit $10^{-k}$ vorkommt, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\big\{1 \leqslant m \leqslant n-k+1 : z_m(x) = b_1, z_{m+1}(x) = b_2, \ldots, z_{m+k-1}(x) = b_k\big\} = \frac{1}{10^k}.$$

Zeigen Sie: Lebesgue-fast alle Zahlen sind normal, d.h. $\lambda(\{x \in (0,1) : x \text{ normal}\}) = 1$.

[*Hinweis.* Fassen Sie beispielsweise $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda|_{[0,1)}, \tau)$ mit $\tau(x) = 10x - [10x]$ als ergodisches dynamisches System auf, dann gilt $z_1(x) = [10x]$ und $z_{n+1}(x) = z_1(\tau^n(x))$ $\lambda|_{[0,1)}$-f.s.]

**Aufgabe 13.3** Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ Standard-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie: $(B_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ ist ein Martingal, für $a, b > 0$ gilt mit $\tau := \inf\{t \geqslant 0 : B_t = -a \text{ oder } B_t = b\}$

$$\mathbb{P}\big(B_\tau = b\big) = \frac{a}{a+b}, \quad \mathbb{E}[\tau] = ab.$$

**Aufgabe 13.4** Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ Brownsche Bewegung, $t > 0$, für $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$ sei $s(n,m) := tm/2^n$ und $D_{n,m} := B_{s(n,m)} - B_{s(n,m-1)}$.

a) Zeigen Sie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 - t\Big)^2\Big] < \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 = t \quad \text{f.s.}$$

b) Folgern Sie: Für $\gamma > 1/2$ ist

$$\sup_{0\leqslant u<v\leqslant t} \frac{|B_v - B_u|}{(v-u)^\gamma} = \infty \quad \text{f.s.},$$

d.h. die Pfade sind auf $[0,t]$ f.s. nicht Hölder-stetig der Ordnung $\gamma$.

[*Hinweis.* Schätzen Sie $\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2$ auf dem Ereignis $\big\{\sup_{0\leqslant u<v\leqslant t} |B_v - B_u|/(v-u)^\gamma < c\big\}$ ab.]

**Abgabe der Aufgaben:** Keine