Zur bedingten Erwartung

Matthias Birkner

WS 2014/2015

Zusammenfassung

Dieser Text faßt einige Eigenschaften der bedingten Erwartung knapp zusammen, mehr Details und insbesondere Beweise finden sich beispielsweise bei [K, Kap. 8] oder [D, Kap. 5].

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathscr{G} \subset \mathscr{A}$ eine (Teil-)σ-Algebra, X eine reellwertige Zufallsvariable. Wenn $\mathscr{G}$ endlich viele Atome $A_1, \dots, A_\ell$ hat, liegt es nahe, die „bedingte Erwartung von X, gegeben die Information aus $\mathscr{G}$" folgendermaßen zu definieren:

$$\mathbb{E}[X|\mathscr{G}](\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)}\mathbb{E}[X1_{A_i}] \quad \text{für } \omega \in A_i. \tag{1}$$

Man verallgemeinert (1) folgendermaßen: Eine reellwertige ZV Z heißt bedingte Erwartung von X gegeben $\mathscr{G}$ (schreibe $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$), wenn gilt

1. Z ist $\mathscr{G}$-messbar, d.h. $\{Z \in B\} \in \mathscr{G}$ für jede messbare Teilmenge $B \subset \mathbb{R}$,
2. $\mathbb{E}[HZ] = \mathbb{E}[HX]$ für alle beschränkten $\mathscr{G}$-messbaren ZVn H.

(Anstelle von 2. genügt es zu fordern, dass $\mathbb{E}[1_A Z] = \mathbb{E}[1_A X]$ für alle $A \in \mathscr{G}$ gilt.) Man überzeugt sich leicht, dass im Fall $|\Omega| < \infty$ die Version aus (1) diese Definition erfüllt.

Für integrierbares X existiert die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ und ist bis auf f.s.-Gleichheit eindeutig bestimmt (Existenz beispielsweise via Projektion auf den Unterraum der (quadratintegrablen) $\mathscr{G}$-messbaren ZVn oder via Satz von Radon-Nikodým). Neben den „üblichen" Eigenschaften von Erwartungwerten (Linearität, Positivität, Dreiecksungleichung, Stetigkeitseigenschaften: Satz von der monotonen und Satz von der dominierten Konvergenz) sind wichtige Eigenschaften (die Gleichungen bzw. Ungleichungen gelten jeweils f.s.)

1. $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\big|\mathscr{G}'\big] = \mathbb{E}[X|\mathscr{G}']$ wenn $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$ („Turmeigenschaft"),
2. $\mathbb{E}[YX|\mathscr{G}] = YE[X|\mathscr{G}]$ sofern Y $\mathscr{G}$-messbar ist (und $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$) ($\mathscr{G}$-messbare ZVn verhalten sich unter $\mathbb{E}[\cdot|\mathscr{G}]$ wie Konstante unter dem gewöhnlichen Erwartungswert)
3. $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[X]$ wenn X u.a. von $\mathscr{G}$,
4. $\varphi(\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathscr{G}]$ wenn $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex ist und $E[|\varphi(X)|] < \infty$ gilt (Jensensche Ungleichung für die bedingte Erwartung).

Wenn $X = 1_B$ für ein Ereignis $B \in \mathscr{A}$, so schreibt man gelegentlich auch $\mathbb{P}(B|\mathscr{G}) = \mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$. Man muss allerdings etwas vorsichtig sein bei der Interpretation von $\mathbb{P}(\cdot|\mathscr{G})$ als ein (zufälliges) Maß, da womöglich überabzählbar viele B in Frage kommen und damit die Kompatibilität der in der Definition der bedingten Erwartung implizit vorkommenden Nullmengen wenigstens a priori unklar bleibt. In „gutartigen" Fällen ist eine konsistente Wahl möglich, Stichwort „reguläre bedingte Verteilung", siehe z.B. [K, Kap. 8.3].

Literatur

[K] A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer 2006.

[D] A. Depperschmidt, Stochastik I, Vorlesungsskript, SS 2014, `http://www.stochastik.uni-freiburg.de/homepages/deppers/dateien/stochastikI.pdf`