Stochastik I

Notizen zu einer Vorlesung an der
Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, Sommer 2024

Matthias Birkner

Vorläufige Version, 8. Mai 2024

Kommentare, Korrekturvorschläge, Hinweise auf (Tipp-)fehler gerne per Email an
`birkner@mathematik.uni-mainz.de` senden

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen der Maßtheorie

In diesem Kapitel geht es um grundlegende Begriffe und Sätze der Maßtheorie, insoweit sie für die Diskussion und Fundierung der Stochastik benötigt werden. Nachzulesen (und z.T. weiterführend) z.B. bei Klenke [Kl, Kapitel 1], Williams [Wi, Chapter 1], Kallenberg [Ka, Chapter 1 and 2], Durrett [Du, Appendix].

1.1 Mengensysteme, σ-Algebren

Sei Ω (nicht-leere) Menge (der „Ergebnisraum" oder „Stichprobenraum"), $2^\Omega := \{B : B \subset \Omega\}$ die Potenzmenge.

Definition 1.1. $\mathscr{A} \subset 2^\Omega$ heißt eine *σ-Algebra* (über Ω), falls gilt

$$\begin{aligned} &i) \quad \Omega \in \mathscr{A}, \\ &ii) \quad A \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathscr{A}, \\ &iii) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Falls $\mathscr{A}$ *i)*, *ii)* und

$$iii') \quad A, B \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathscr{A}$$

erfüllt, so heißt $\mathscr{A}$ eine *Algebra*.

Beobachtung 1.2. 1. Ist $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra, so gilt auch

$$\begin{aligned} &iv) \quad \varnothing = \Omega^c \in \mathscr{A}, \\ &v) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \Big)^c \in \mathscr{A} \end{aligned}$$

(wir verwenden die de Morgan'sche Regel: $\big(\bigcap_n A_n \big)^c = \bigcup_n A_n^c$).

2. Eine Algebra $\mathscr{A}$ erfüllt

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathscr{A} \text{ und } A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathscr{A}$$

3. $\{\varnothing, \Omega\}$ und 2^Ω sind σ-Algebren.

4. Eine σ-Algebra ist insbesondere eine Algebra, denn

$$A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$$

Definition 1.3. Ein Paar $(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\mathscr{A}$ σ-Algebra über Ω heißt ein *messbarer Raum* (auch: Messraum oder Ereignisraum).

$A \in \mathscr{A}$ heißt ($\mathscr{A}$-)messbare Teilmenge von Ω.

Bemerkung 1.4. Seien $\mathscr{A}_i$, $i \in I$ σ-Algebren über Ω (wobei I eine beliebige Indexmenge), so ist

$$\bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i \quad \text{ebenfalls eine } \sigma\text{-Algebra über } \Omega.$$

Beweis. i), ii) sind klar, zu *iii)*:

$$A_1, A_2, \dots \in \bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, i \in I \,:\, A_n \in \mathscr{A}_i,$$

somit gilt

$$A_1, A_2, \dots \in \bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in I \,:\, \bigcup_n A_n \in \mathscr{A}_i \quad \Rightarrow \quad \bigcup_n A_n \in \bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i.$$

□

Definition 1.5. Für $\mathscr{C} \subset 2^\Omega$ heißt

$$\sigma(\mathscr{C}) := \bigcap \left\{ \mathscr{A} : \mathscr{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra mit } \mathscr{C} \subset \mathscr{A} \subset 2^\Omega \right\},$$

die von $\mathscr{C}$ erzeugte σ-Algebra. Dies ist offenbar die kleinste σ-Algebra über Ω, die $\mathscr{C}$ umfasst.

Erinnerung 1.6 (Topologie). $\tau \subset 2^\Omega$ heißt eine Topologie (auf Ω), wenn gilt

$$\begin{aligned} &i) && \varnothing, \Omega \in \tau, \\ &ii) && A, B \in \tau \;\Rightarrow\; A \cap B \in \tau \\ &iii) && \mathcal{F} \subset \tau \text{ beliebige Teilmenge } \;\Rightarrow\; \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \in \tau. \end{aligned}$$

$A \in \tau$ sind/heißen die offenen Teilmengen in Ω (bzgl. τ).

Wenn Ω eine Metrik d trägt (d.h. $d : \Omega \times \Omega \to [0, \infty)$ mit $\forall\, x, y, z \in \Omega$: i) $d(x, y) = d(y, x)$, ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$, iii) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$),
so erzeugt d eine Topologie τ via

$$A \in \tau \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in A : \exists\, r > 0 : B_r(x) \subset A$$

wo $B_r(x) := \{y \in \Omega : d(x, y) < r\}$ die offene Kugel um x mit Radius r ist.

Auf $\Omega = \mathbb{R}^m$ verwenden wir (meist)

$$d(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 \Big)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_m),\; y = (y_1, \dots, y_m),$$

den Euklidischen Abstand.

Definition 1.7. Wenn Ω eine Topologie τ trägt, so heißt die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra $\sigma(\tau)$ die *Borel-σ-Algebra*[1], man schreibt $\mathcal{B}(\Omega) := \sigma(\tau)$.

Beispiel 1.8 (Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$). Für $a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ schreibe $a \leq b$ (bzw. $a < b$), wenn $a_i \leq b_i$ (bzw. $a_i < b_i$) für $i = 1, 2, \dots, d$,

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^d : a \leq x \leq b\} = \bigtimes_{i=1}^{d} [a_i, b_i]$$

analog $(a, b]$, (a, b).

Jedes der folgenden Mengensysteme erzeugt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_0 &:= \left\{B_r(x) : x \in \mathbb{Q}^d, r \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)\right\} \\
\mathscr{C}_1 &:= \left\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}^d\right\} \\
\mathscr{C}_2 &:= \left\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^d, a < b\right\} \\
\mathscr{C}_3 &:= \left\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\right\} \\
\mathscr{C}_4 &:= \left\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d, a < b\right\}
\end{aligned}$$

Beweis. Es genügt für $i = 0, \dots, 4$ zu zeigen, dass $\mathscr{C}_i \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und dass $\mathcal{O} \in \sigma(\mathscr{C}_i)$ für jede offene Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ (denn $\mathscr{C}_i \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \sigma(\mathscr{C}_i) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$; $\tau \subset \sigma(\mathscr{C}_i) \Rightarrow \sigma(\tau) \subset \sigma(\mathscr{C}_i)$).

Betrachte $\mathscr{C}_0$: Offenbar ist $\mathscr{C}_0 \subset \tau \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ offen lässt sich darstellen als

$$\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n) \in \sigma(\mathscr{C}_0)$$

mit geeigneten $x_n \in \mathbb{Q}^d \cap \mathcal{O}$ und $r_n \in \mathbb{Q}_+$. $\mathscr{C}_4$ kann analog behandelt werden. Wegen

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \bigcap_n \left(a - (\tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{1}{n}), b + (\tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{1}{n})\right) \in \sigma(\mathscr{C}_4), \\
(a, b) &= \bigcup_n \left[a + (\tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{1}{n}), b - (\tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{1}{n})\right] \in \sigma(\mathscr{C}_3)
\end{aligned}$$

ist $\sigma(\mathscr{C}_3) = \sigma(\mathscr{C}_4)$, analog $\sigma(\mathscr{C}_2) = \sigma(\mathscr{C}_4)$.

Wegen

$$(-\infty, b] = \bigcup_n \left[(-n, \dots, -n), b\right] \in \sigma(\mathscr{C}_3)$$

ist $\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \sigma(\mathscr{C}_3)$, wegen

$$(a, b] = (-\infty, b] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{d} (-\infty, c^{(i)}]\right) \quad \text{mit } c^{(i)} = (b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \dots, b_d)$$

ist $\sigma(\mathscr{C}_2) \subset \sigma(\mathscr{C}_1)$. □

[1] nach Émile Borel, 1871–1956

Bemerkung. Für $\Omega = \mathbb{R}$ ist

$$\mathscr{A} = \Big\{ \bigcup_{j=1}^{k} I_j \; : \; k \in \mathbb{N}, I_1, \ldots, I_k \text{ paarw. disjunkte (möglicherw. halb-unendliche) Intervalle} \Big\}$$

eine Algebra.

Definition 1.9. $\mathscr{C} \subset 2^{\Omega}$ heißt *schnittstabil*, wenn

$$\text{für alle } \; A, B \in \mathscr{C} : \; A \cap B \in \mathscr{C}$$

Beobachtung. Die Mengensysteme $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_4$ aus Bsp. 1.8 sind $\cap$-stabil.

Definition 1.10. $\Omega \neq \varnothing$. $\mathscr{D} \subset 2^{\Omega}$ heißt ein *Dynkin-System*[2] (auch: ein λ-System), wenn gilt

i) $\Omega \in \mathscr{D}$,

ii) $A \in \mathscr{D} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathscr{D}$,

iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{D}$ paarweise disjunkt $\;\Rightarrow\; \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{D}$.

Bemerkung 1.11.

1. $\mathscr{A}$ σ-Algebra $\Rightarrow$ $\mathscr{A}$ Dynkin-System
2. $\mathscr{D}$ Dynkin-System, so ist $\varnothing = \Omega^c \in \mathscr{D}$, für $D_1 \ldots, D_n \in \mathscr{D}$ paarweise disjunkt ist $D_1 \uplus D_2 \uplus \cdots \uplus D_n = D_1 \uplus D_2 \uplus \cdots \cup D_n \uplus \varnothing \uplus \varnothing \uplus \cdots \in \mathscr{D}$.
3. $\mathscr{D}$ Dynkin-System, $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ mit $D_1 \subset D_2$, so ist $D_2 \setminus D_1 = (D_1 \uplus D_2^c)^c \in \mathscr{D}$.
4. Im Allgemeinen ist ein Dynkin-System nicht abgeschlossen unter $\cap$ (und somit keine Algebra). Betrachte z.B. Ω endlich mit $|\Omega| \in 2\mathbb{N} \cap [4, \infty)$, $\mathscr{D} := \{A \subset \Omega : |A| \text{ ist gerade}\}$ ist ein Dynkin-System.

Proposition 1.12. *Ein Dynkin-System $\mathscr{D}$ ist eine σ-Algebra g.d.w. $\mathscr{D}$ $\cap$-stabil ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ : ✓

„$\Leftarrow$“ : Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{D}$. Wir konstruieren (induktiv) $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$, D_i paarweise disjunkt mit $\dot{\bigcup}_n D_n = \bigcup_n A_n$:

Setze $D_1 := A_1$, $D_2 := A_2 \setminus (A_1 \cap A_2) \in \mathscr{D}$, also $D_1 \uplus D_2 = A_1 \cup A_2$,

gegeben paarw. disj. $D_1, \ldots, D_n \in \mathscr{D}$ mit $D_1 \uplus \cdots \uplus D_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ setze

$$D_{n+1} := A_{n+1} \setminus \Big(\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} D_j \cap A_{n+1} \Big) \in \mathscr{D},$$

dann ist $\dot{\bigcup}_{j=1}^{n+1} D_j = \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j$. □

[2] nach Evgenii Dynkin, 1924–2014

Beobachtung und Definition 1.13. $\mathscr{D}_i$, $i \in I$ (beliebige Indexmenge) Dynkin-Systeme (über Ω), so ist $\bigcap_{i\in I} \mathscr{D}_i$ wiederum ein Dynkin-System.

Für $\mathscr{E} \subset 2^\Omega$ heißt

$$\delta(\mathscr{E}) := \bigcap \big\{ \mathscr{D} : \mathscr{D} \text{ ist Dynkin-System mit } \mathscr{E} \subset \mathscr{D} \big\}$$

das von $\mathscr{E}$ erzeugte Dynkin-System. Dies ist offenbar das kleinste Dynkin-System über Ω, das $\mathscr{E}$ umfasst.

Satz 1.14. *$\mathscr{E} \subset 2^\Omega$ $\cap$-stabil, so gilt $\delta(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$.*

Beweis. Stets gilt: $\delta(\mathscr{E}) \subset \sigma(\mathscr{E})$.
Zeige: $\delta(\mathscr{E})$ ist $\cap$-stabil.

Sei $B \in \delta(\mathscr{E})$,

$$\mathscr{D}_B := \{ A \subset \Omega : A \cap B \in \delta(\mathscr{E}) \}$$

ist ein Dynkin-System:

1) $\Omega \cap B = B \in \delta(\mathscr{E})$, also $\Omega \in \mathscr{D}_B$.

2) Sei $A \in \mathscr{D}_B$. $A^c \cap B = B \smallsetminus (A \cap B) \in \delta(\mathscr{E})$, also $A^c \in \mathscr{D}_B$.

3) Seien $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathscr{D}_B$ paarweise disjunkt, dann ist

$$\Big(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n \Big) \cap B = \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} \underbrace{(A_n \cap B)}_{\in \delta(\mathscr{E})} \in \delta(\mathscr{E}), \quad \text{also auch } \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n \in \mathscr{D}_B.$$

Zeige $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}_B$: Betrachte zunächst den Fall $(B =)\ E \in \mathscr{E}$, dann gilt $A \cap E \in \mathscr{E} \subset \delta(\mathscr{E})$ für jedes $A \in \mathscr{E}$ (denn $\mathscr{E}$ ist nach Voraussetzung $\cap$-stabil), also gilt $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}_E$ in diesem Fall.

Somit gilt auch $\delta(\mathscr{E}) \subset \mathscr{D}_E$ für jedes $E \in \mathscr{E}$.

Für $B \in \delta(\mathscr{E})$, $E \in \mathscr{E}$ ist daher $E \cap B \in \delta(\mathscr{E})$. Mithin gilt $E \in \mathscr{D}_B$ für $E \in \mathscr{E}, B \in \delta(\mathscr{E})$, d.h. $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}_B$.

Da $\mathscr{D}_B$ für jedes $B \in \delta(\mathscr{E})$ selbst ein Dynkin-System ist, folgt $\delta(\mathscr{E}) \subset \mathscr{D}_B$, d.h. $\delta(\mathscr{E})$ ist $\cap$-stabil wie behauptet.

Mit Prop. 1.12 folgt $\delta(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$. □

Bemerkung 1.15 (Algebren, Ringe, Halbringe)**.** Die Mengenoperationen $A \Delta B := (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$ („symmetrische Differenz") und $A \cap B$ erfüllen die Axiome eines kommutativen Rings im Sinne der Algebra (Δ entspricht „+", $\cap$ entspricht „×", $\varnothing$ ist die additive 0, Ω ist die multiplikative 1).

Ein *Ring* $\mathscr{A}$ (im Sinne der Mengensysteme) erfüllt

$$\begin{aligned} &\textit{i)} && \varnothing \in \mathscr{A}, \\ &\textit{ii)} && A, B \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathscr{A}, \\ &\textit{iii)} && A, B \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A \smallsetminus B \in \mathscr{A} \end{aligned}$$

insbesondere gilt für einen Ring $\mathscr{A}$ auch

$$A, B \in \mathscr{A} \;\Rightarrow A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathscr{A}$$

und $\mathscr{A}$ ist abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen.

Ein *Halbring* $\mathscr{A}$ (im Sinne der Mengensysteme) erfüllt $\varnothing \in \mathscr{A}$, für $A, B \in \mathscr{A}$ gilt $A \cap B \in \mathscr{A}$ und $A \setminus B = \dot\bigcup_{j=1}^m C_j$ für geeignete paarweise disjunkte $C_1, \dots, C_m \in \mathscr{A}$

Ein „klassisches“ Beispiel eines (Mengen-)Rings über $\mathbb{R}$ ist

$$\{\text{endl. Vereinigungen von Intervallen aus } \mathbb{R}\},$$

ein „klassisches“ Beispiel eines (Mengen-)Halbrings über $\mathbb{R}$ ist

$$\{\text{endl. Intervalle aus } \mathbb{R}\}.$$

1.2 Mengenfunktionen, Maße

Definition 1.16. $(\Omega, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ heißt ein *Maß* (auf $(\Omega, \mathscr{A})$), wenn gilt $\mu(\varnothing) = 0$ und

$$A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A} \text{ paarw. disjunkt } \Rightarrow \mu\Big(\dot\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$$

(μ ist σ-additiv).

μ heißt *endliches Maß*, wenn $\mu(\Omega) < \infty$; μ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn $\mu(\Omega) = 1$; μ heißt *σ-endlich*, wenn es eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ gibt mit $\bigcup_n C_n = \Omega$ und $\mu(C_n) < \infty$ für alle n.

Wenn $\mathscr{A}$ (nur) eine Algebra ist: $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ mit

$$\mu\big(A_1 \,\dot\cup\, A_2 \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, A_n\big) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$$

heißt ein *Inhalt* (d.h. ein Inhalt μ ist endlich additiv); μ heißt in diesem Fall ein *Prämaß*, wenn es σ-additiv ist.

Bemerkung 1.17. Sei μ Maß

1. $A, B \in \mathscr{A}, A \subset B \;\Rightarrow\; \mu(A) \le \mu(B) \quad$ (denn $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$)
2. $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \le \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n)$
3. Wenn $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt für $A, B \in \mathscr{A}$
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$
4. Wenn $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt für $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N}$
$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{\varnothing \ne K \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|K|-1} \mu\Big(\bigcap_{k\in K} A_k\Big)$$
(„Einschluss-Ausschluss-Regel“).

Beispiel. 1. Für beliebiges Ω und $a \in \Omega$ definiert für $A \in \mathscr{A}$

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

das *Dirac-Maß* δ_a im Punkt a.

2. Für abzählbares Ω (ausgestattet mit $\mathscr{A} = 2^\Omega$) ist

$$\mu(A) = \#A, \quad A \subset \Omega$$

das *Zählmaß*.

Satz 1.18 (Maße sind durch ihre Werte auf einem $\cap$-stabilen Erzeuger festgelegt)**.** *Seien μ_1, μ_2 Maße auf messbarem Raum $(\Omega, \mathscr{A})$, $\mathscr{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathscr{A}$, es gelte*

$$\mu_1(C) = \mu_2(C) \quad \text{\textit{für alle} } C \in \mathscr{E}$$

und es gebe $(C_n)_n \subset \mathscr{E}$ mit $C_1 \subset C_2 \subset \dots, \bigcup_n C_n = \Omega$, $\mu_1(C_n) < \infty$.

Dann gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{A}$.

Beweis. Fixiere $E \in \mathscr{E}$ mit $\mu_1(E)\,(= \mu_2(E)\,) < \infty$,

$$\mathscr{D}_E := \left\{ A \in \mathscr{A} : \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E) \right\}$$

ist ein Dynkin-System: $\Omega \in \mathscr{D}_E$ n. Vor.; sei $A \in \mathscr{D}_E$, so ist :

$$\begin{aligned} \mu_1(A^c \cap E) &= \mu_1(E) - \mu_1(A \cap E) \\ &= \mu_2(E) - \mu_2(A \cap E) = \mu_2(A^c \cap E), \end{aligned}$$

d.h. auch $A^c \in \mathscr{D}_E$; seien $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathscr{D}_E$ paarweise disjunkt :

$$\begin{aligned} &\mu_1\Big(\big(\dot{\bigcup_{n=1}^\infty} A_n\big) \cap E\Big) = \mu_1\Big(\dot{\bigcup_{n=1}^\infty}(A_n \cap E)\Big) = \sum_{n=1}^\infty \mu_1(A_n \cap E) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \mu_2(A_n \cap E) = \mu_2\Big(\big(\dot{\bigcup_{n=1}^\infty} A_n\big) \cap E\Big), \end{aligned}$$

d.h. $\dot{\bigcup}_{n=1}^\infty A_n \in \mathscr{D}_E$.

Nach Voraussetzung ist $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}_E$, also (mit Satz 1.14)

$$\mathscr{D}_E \supset \delta(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{A}.$$

Sei $(C_n)_n \subset \mathscr{E}$ mit $C_n \nearrow \Omega$ wie oben, $B_n := C_n \setminus C_{n-1}$ ($C_0 := \emptyset$), also

$$C_N = \dot{\bigcup_{n=1}^N} B_n \quad \text{für jedes } N \in \mathbb{N}.$$

Sei $A \in \mathscr{A}$: Für $i = 1, 2$ ist

$$\begin{aligned}\mu_i(A) &= \mu_i\Big(A \cap \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} B_n\Big) = \mu_i\Big(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}}(A \cap B_n)\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_i(A \cap B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu_i(A \cap B_n) \\ &= \lim_{N\to\infty} \mu_i(A \cap C_N)\end{aligned}$$

und der Ausdruck in der letzten Zeile hängt nach obigem nicht von i ab.

Somit gilt $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ für alle $A \in \mathscr{A}$. □

Beispiel 1.19 (W'maße auf $\mathbb{R}^d$ und Verteilungsfunktionen)**.** μ W'maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $F_\mu : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$,

$$F_\mu(x) = \mu\big((-\infty, x]\big), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

ist die *Verteilungsfunktion* von μ.

μ ist durch F_μ festgelegt (nach Satz 1.18, denn $\sigma\big((-\infty, x] : x \in \mathbb{R}^d\big) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}^d\}$ ist $\cap$-stabil).

Proposition 1.20. *$\mathscr{G} \subset 2^\Omega$ Algebra, μ endlich additiv auf $\mathscr{G}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$. Wir betrachten folgende Eigenschaften:*

i) *μ σ-additiv (auf $\mathscr{G}$)*

ii) *μ aufsteigend stetig :* $(A_n)_n \subset \mathscr{G}$ *mit* $A_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} A \in \mathscr{G} \Rightarrow \mu(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$

iii) *μ absteigend stetig :* $(A_n)_n \subset \mathscr{G}$ *mit* $A_n \underset{n\to\infty}{\searrow} A \in \mathscr{G}$ *und* $\mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$

iv) *μ stetig in $\emptyset$:* $(A_n)_n \subset \mathscr{G}$ *mit* $A_n \underset{n\to\infty}{\searrow} \emptyset$ *und* $\mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Stets gilt i) $\iff$ ii), iii) $\iff$ iv), ii) $\Rightarrow$ iii).

Wenn $\mu(\Omega) < \infty$ so gilt auch iii) $\Rightarrow$ ii), d.h. dann sind i)–iv) äquivalent.

Beweis. *„i) $\iff$ ii)"* : $\mathscr{G} \ni A_n \nearrow A \in \mathscr{G}$, setze $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ (mit $A_0 := \emptyset$), dann ist $\dot{\bigcup}_{n=1}^{N} B_n = A_N \nearrow_{N\to\infty} A$.

Wenn *i)* gilt, so ist

$$\mu(A) = \mu\Big(\dot{\bigcup_n} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N),$$

d.h. dann gilt auch *ii)*.

Analog: Seien $B_1, B_2, \dots \in \mathscr{G}$ paarweise disjunkt mit

$$A_N := B_1 \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, B_N \underset{N\to\infty}{\nearrow} \dot{\bigcup_n} B_n =: A \in \mathscr{G}.$$

Wenn *ii)* gilt, so gilt wie oben $\mu(A) = \mu\Big(\dot\bigcup_n B_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$, d.h. dann gilt auch *i)*.

„iii) $\Rightarrow$ iv)" : ✓

„iv) $\Rightarrow$ iii)" : Sei $A_n \searrow A \in \mathscr{G}$, $\mu(A_n) < \infty$. $\mathscr{G} \ni B_n := A_n \setminus A \searrow_{n\to\infty} \varnothing$ und $\mu(B_n) \le \mu(A_n) < \infty$. Somit

$$\mu(A_n) = \mu(A) + \mu(B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A),$$

denn $\mu(B_n) \to 0$ n. Vor.

„ii) $\Rightarrow$ iii)" : Sei $A_n \searrow A \in \mathscr{G}$, $\mu(A_n) < \infty$, setze $B_n := A_1 \setminus A_n \nearrow_{n\to\infty} A_1 \setminus A$ (und $A_1 = B_n \uplus A_n$), somit (nach *ii)*)

$$\mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\mu(A_1)}_{=\mu(A)+\mu(A_1\setminus A)} - \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A),$$

d.h. *iii)* gilt.

Sei weiter $\mu(\Omega) < \infty$, dann gilt *„iii) $\Rightarrow$ ii)"* : $A_n \nearrow A \in \mathscr{G}$, also $B_n := \Omega \setminus A_n \searrow \Omega \setminus A =: B$,

$$\mu(A_n) = \mu(\Omega) - \mu(B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\Omega) - \mu(B) = \mu(A).$$

□

Definition 1.21. Ein Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, wo $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über Ω $(\neq \varnothing)$ und μ ein Maß auf $\mathscr{A}$ ist, heißt ein *Maßraum*. Wenn μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, so heißt $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ (auch) ein *Wahrscheinlichkeitsraum*.

Satz 1.22 (Carathéodorys[3] Maßfortsetzungssatz)**.** *$\mathscr{A} \subset 2^\Omega$ Algebra, μ Prämaß auf $\mathscr{A}$. Dann gibt es ein Maß $\widetilde{\mu}$ auf $\sigma(\mathscr{A})$, das auf $\mathscr{A}$ mit μ übereinstimmt.*

Wenn μ σ-endlich ist, so ist $\widetilde{\mu}$ dadurch eindeutig bestimmt.

Definition 1.23. $\nu : 2^\Omega \to [0, \infty]$ mit $\nu(\varnothing) = 0$,

$$\begin{array}{llll} \textit{i)} & \forall\, C_1 \subset C_2 \subset \Omega : & \nu(C_1) \le \nu(C_2) & \text{(„Monotonie")} \\ \textit{ii)} & \forall\, (C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^\Omega : & \nu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty C_n\Big) \le \sum_{n=1}^\infty \nu(C_n) & \text{(„}\sigma\text{-Subadditivität")} \end{array}$$

heißt ein *äußeres Maß*.

Lemma 1.24. *μ Prämaß auf Algebra $\mathscr{A}$.*

$$\mu^*(C) := \inf\Big\{ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \,:\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A} \textit{ mit } \bigcup_n A_n \supset C \Big\}, \quad C \subset \Omega$$

ist ein äußeres Maß mit $\mu^*(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathscr{A}$.

[3] Constantin Carathéodory, 1873–1950

Beweis. 1) Zeige $\mu^* = \mu$ auf $\mathscr{A}$: Sei $A \in \mathscr{A}$, wähle $\varepsilon > 0$.

Nach Def. gibt es $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ mit $A \subset \bigcup_n A_n$ und

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

o.E. mit $A_n \subset A$ und $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt (sonst gehe über zu $A'_n := A_n \cap A \in \mathscr{A}$ und dann zu $A''_n := A'_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A'_j\right) \in \mathscr{A}$), somit $A = \dot\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu(A_n) = \mu(A) \leq \mu^*(A) + \varepsilon,$$

mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Insbesondere gilt $\mu^*(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

2) Sei $C \subset C' \subset \Omega$, so gilt $\mu^*(C) \leq \mu^*(C')$, denn $C' \subset \bigcup_n A_n \Rightarrow C \subset \bigcup_n A_n$.

3) Sei $(C_n)_n \subset 2^\Omega$, wähle $\varepsilon > 0$.

Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es $A_{n,i} \in \mathscr{A}$, $i \in \mathbb{N}$ mit $C_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n,i}$ und

$$\mu^*(C_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{n,i}) \leq \mu^*(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Sei B_m, $m \in \mathbb{N}$ eine Aufzählung von $\{A_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}\}$, es ist

$$\bigcup_n C_n \subset \bigcup_{n,i} A_{n,i} = \bigcup_m B_m,$$

also

$$\begin{aligned}\mu^*\Big(\bigcup_n C_n\Big) &\leq \sum_m \mu(B_m) = \sum_n \sum_i \mu(A_{n,i}) \\ &\leq \sum_n \Big(\mu^*(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) = \varepsilon + \sum_n \mu^*(C_n).\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt σ-Subadditivität von μ^*. □

Definition 1.25. μ^* ein äußeres Maß. $A \subset \Omega$ heißt μ^*-*messbar*, wenn gilt

$$\forall\, C \subset \Omega : \quad \mu^*(C) \geq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)$$

(wegen σ-Subadditivität von μ^* gilt dann tatsächlich $\mu^*(C) = \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)$ für $C \subset \Omega$).

Beweis von Satz 1.22. Definiere μ^* wie in Lemma 1.24, setze

$$\mathscr{A}_* := \{A \subset \Omega : A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}.$$

1) Zeige $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_*$: Sei $A \in \mathscr{A}$ fest. Zu $C \subset \Omega$, $\varepsilon > 0$ sei $(A_n)_n \subset \mathscr{A}$ mit $C \subset \bigcup_n A_n$ und

$$\mu^*(C) \leq \sum_n \mu(A_n) \leq \mu^*(C) + \varepsilon.$$

Es ist

$$A \cap C \subset \bigcup_n \underbrace{(A \cap A_n)}_{\in \mathscr{A}}, \quad A^c \cap C \subset \bigcup_n \underbrace{(A^c \cap A_n)}_{\in \mathscr{A}},$$

also

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C) &\leq \sum_n \mu(A \cap A_n) + \sum_n \mu(A^c \cap A_n) \\ &= \sum_n \mu\big((A \cap A_n) \cup (A^c \cap A_n)\big) = \sum_n \mu(A_n) \leq \mu^*(C) + \varepsilon,\end{aligned}$$

mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt $\mu^*(C) \geq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)$, d.h. die Behauptung.

2) Zeige: $\mathscr{A}_*$ ist eine Algebra: $\varnothing \in \mathscr{A}_*$ ✓; $A \in \mathscr{A}_* \;\Rightarrow\; A^c \in \mathscr{A}_*$ ✓(Def. 1.25 ist symmetrisch bzgl. Vertauschung von A und A^c)

Seien nun $A, B \in \mathscr{A}_*$: Für $C \subset \Omega$ ist

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &= \mu^*(B \cap C) + \mu^*(B^c \cap C) \\ &= \mu^*(A \cap B \cap C) + \mu^*(A^c \cap B \cap C) + \mu^*(A \cap B^c \cap C) + \mu^*(A^c \cap B^c \cap C).\end{aligned} \tag{1.1}$$

Ersetzen wir C durch $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ in (1.1), so ergibt sich

$$\mu^*\big((A \cup B) \cap C\big) = \mu^*(A \cap B \cap C) + \mu^*(A^c \cap B \cap C) + \mu^*(A \cap B^c \cap C) \tag{1.2}$$

(denn $\mu^*\big((A^c \cap B^c \cap (A \cup B) \cap C\big) = \mu^*(\varnothing) = 0$). Einsetzen von (1.2) in (1.1) liefert

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &= \mu^*\big((A \cup B) \cap C\big) + \mu^*\big(A^c \cap B^c \cap C\big) \\ &= \mu^*\big((A \cup B) \cap C\big) + \mu^*\big((A \cup B)^c \cap C\big),\end{aligned}$$

da dies für beliebiges C stimmt, gilt $A \cup B \in \mathscr{A}_*$.

3) Zeige: $\mathscr{A}_*$ ist ein Dynkin-System.

Seien $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{A}_*$ paarw. disjunkt, $A := \dot\bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Für $A_1, A_2 \in \mathscr{A}_*$ mit $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ und beliebiges $C \subset \Omega$ liefert (1.2)

$$\mu^*\big((A_1 \,\dot\cup\, A_2) \cap C\big) = \mu^*(A_1^c \cap A_2 \cap C) + \mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap C),$$

induktiv folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\mu^*\Big(\big(\dot\bigcup_{i=1}^n A_i\big) \cap C\Big) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A_i \cap C) \quad \text{für alle } C \subset \Omega.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\dot\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{A}_*$ nach 2), also gilt für jedes $C \subset \Omega$

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &= \mu^*\Big(\big(\dot\bigcup_{i=1}^n A_i\big) \cap C\Big) + \mu^*\Big(\underbrace{\big(\dot\bigcup_{i=1}^n A_i\big)^c \cap C}_{\supset A^c \cap C}\Big) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A_i \cap C) + \mu^*(A^c \cap C).\end{aligned}$$

Mit $n \to \infty$ folgt

$$\mu^*(C) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap C) + \mu^*(A^c \cap C). \tag{1.3}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\mu^*(C) = \mu^*\big((A \cap C) \cup (A^c \cap C)\big) &= \mu^*\Big(\big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}}(A_i \cap C)\big) \cup (A^c \cap C)\Big)\\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap C) + \mu^*(A^c \cap C) \end{aligned} \tag{1.4}$$

(wir verwenden die σ-Subadditivität von μ^*). (1.3) und (1.4) liefern

$$\mu^*(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap C) + \mu^*(A^c \cap C), \tag{1.5}$$

da $\mu^*(A \cap C) = \mu^*\Big(\big(\dot\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap C)\big)\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap C)$ und $\mu^*(C) \leq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)$ gilt (nochmals σ-Subadditivität von μ^*), impliziert dies

$$\mu^*(C) = \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C),$$

also $A \in \mathscr{A}_*$.

4) 2) und 3) zeigen mit Prop. 1.12, dass $\mathscr{A}_*$ eine σ-Algebra ist; wegen 1) gilt $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}_*$.

Zeige: μ^* ist σ-additiv auf $\mathscr{A}_*$:

Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A}_*$ paarweise disjunkt, setze $A := \dot\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}_*$ an Stelle von C in (1.5) ein:

$$\mu^*\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

(denn $A \cap A_i = A_i$ n. Vor., $\mu^*(A^c \cap A) = \mu^*(\emptyset) = 0$). Somit leistet $\widetilde{\mu} := \mu^*|_{\sigma(\mathscr{A})}$ das Gewünschte.

5) Zur Eindeutigkeit: Seien $A_1 \subset A_2 \subset \dots \in \mathscr{A}$ mit $A_n \nearrow \Omega$, $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2$ zwei Maße auf $\sigma(\mathscr{A})$ mit $\mu = \widetilde{\mu}_1 = \widetilde{\mu}_2$ auf $\mathscr{A}$. Dann gilt $\widetilde{\mu}_1 = \widetilde{\mu}_2$ auf $\sigma(\mathscr{A})$ nach Satz 1.18, da $\mathscr{A}$ $\cap$-stabil ist. $\square$

Erinnerung 1.26. Eine *Verteilungsfunktion* (einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$) ist eine Funktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, die nicht-fallend und rechtsstetig ist mit $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Satz 1.27. *Zu jeder Verteilungsfunktion F gehört genau ein W'maß μ_F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit*

$$\mu_F\big((-\infty, x]\big) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned}&J_1 := \big\{(a, b] : a < b\big\},\ J_2 := \big\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\big\},\ J_3 := \big\{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\big\}, \quad J := J_1 \cup J_2 \cup J_3,\\ &\mathscr{G} := \Big\{\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} I_j : n \in \mathbb{N}, I_j \in J\Big\} \cup \{\emptyset\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{G}$ *ist* eine Algebra.

Für $A = \dot\bigcup_{k=1}^n I_k \in \mathcal{G}$ mit $I_k = (a_k, b_k]$ $(\cap\mathbb{R})$ definieren wir

$$\mu(A) := \sum_{k=1}^{n} \big(F(b_k) - F(a_k)\big)$$

(mit Setzungen $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$).

μ ist wohldefiniert: Wenn man $I_k = (a_k, b_k]$ ersetzt durch $I_k = I_k' \cup I_k''$ mit $I_k' = (a_k, c_k]$, $I_k'' = (c_k, b_k]$ und einem $c_k \in (a_k, b_k)$, so ändert sich wegen

$$F(b_k) - F(a_k) = \big(F(b_k) - F(c_k)\big) + \big(F(c_k) - F(a_k)\big)$$

der Wert von $\mu_F(A)$ nicht.

Es gilt $\mu(\varnothing) = 0$ und $\mu(\mathbb{R}) = 1$, μ *ist* additiv.

Zur σ-Additivität: Nach Prop. 1.20 genügt es zu zeigen, dass μ stetig in $\varnothing$ ist.
a) (nahezu Kompaktheit)
Zeige: Für $I \in J$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $u, v \in \mathbb{R}$, $u \le v$ mit

$$[u, v] \subset I \quad \text{und} \quad \mu\big((u, v]\big) > \mu(I) - \varepsilon$$

Für $I = (a, b] \in J_1$ verwende $v = b$ und verwende, dass wegen Rechtsstetigkeit von F gilt

$$\lim_{u \downarrow a} \mu\big((u, v]\big) = \lim_{u \downarrow a} F(v) - F(u) = F(b) - F(a) = \mu\big((a, b]\big),$$

für $I \in J_2$ bzw. $I \in J_3$ verwende $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ bzw. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Analog: Für allgemeines $A \in \mathcal{G}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $B \in \mathcal{G}$ beschränkt mit $\overline{B} \subset A$ und $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$.

b) Seien $A_n \in \mathcal{G}$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \ge \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$.
Zeige: Dann gilt $\bigcap_n A_n \neq \varnothing$

Für $n \in \mathbb{N}$ wähle nach a) $B_n \in \mathcal{G}$, B_n beschränkt (also $\overline{B_n}$ kompakt) mit $B_n \subset \overline{B_n} \subset A_n$ und $\mu(A_n \setminus B_n) \le 2^{-n-1}\varepsilon$, es ist

$$\mu\Big(A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n} B_k\Big) \le \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \setminus B_k)\Big) \le \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

(für die erste Ungleichung verwende $A_k \supset A_n$ für $k \le n$), demnach

$$\mu\Big(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\Big) = \mu(A_n) - \mu\Big(A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n} B_k\Big) \ge \frac{\varepsilon}{2},$$

somit ist

$$K_n := \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k} \supset \bigcap_{k=1}^{n} B_k \neq \varnothing$$

kompakt und nicht leer mit $K_n \subset A_n$, $K_n \supset K_{n+1}$.

Es folgt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$$

(Cantor'scher Durchschnittsatz).

□

Lemma 1.28. *$(\Omega, \mathscr{A})$ messbarer Raum, $\mu_1, \mu_2, \dots$ Maße darauf, $c_1, c_2, \dots \geq 0$, so ist $\mu := \sum_n c_n \mu_n$ ebenfalls ein Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$.*

Wenn alle μ_n W'maße sind und $\sum_n c_n = 1$, so ist auch μ ein W'maß.

Beweis. Offenbar ist $\mu(A) = \sum_n c_n \mu_n(A) \geq 0$ für $A \in \mathscr{A}$ und $\mu(\varnothing) = 0$.

Zur σ-Additivität: Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A}$ paarw. disjunkt,

$$\mu\Big(\dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} A_j\Big) = \sum_n c_n \mu_n\Big(\dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} A_j\Big) = \sum_n c_n \sum_j \mu_n(A_j)$$
$$= \sum_j \sum_n c_n \mu_n(A_j) = \sum_j \mu(A_j)$$

□

Satz 1.29 (Konstruktion des (Borel-)Lebesgue-Maßes[4] auf $\mathbb{R}$). *Es gibt genau ein Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\lambda\big((a,b]\big) = b - a$ für $a < b$.*

Beweis. 1) $F_1(x) := (x \wedge 1) \vee 0$ ist Verteilungsfunktion, sei $\lambda_{(0,1]}$ das nach Satz 1.27 zugehörige W'maß.

Offenbar gilt $\lambda_{(0,1]}(A) = 0$ wenn $A \subset (0,1]^c$,

$$\lambda_{(0,1]}\big((u,v]\big) = F_1(v) - F_1(u) = v - u \quad \text{für } 0 \leq u < v \leq 1.$$

Analog betrachte für $m \in \mathbb{Z}: F_m(x) := \big((x - m + 1) \wedge 1\big) \vee 0$ mit zugehörigem Maß $\lambda_{(m-1,m]}$; es erfüllt

$$\lambda_{(m-1,m]}(A) = \lambda_{(m-1,m]}\big((A \cap (m-1,m]\big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

und $\lambda_{(m-1,m]}\big((u,v]\big) = (v \wedge m) - (u \vee (m-1))$.

$\lambda := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_{(m-1,m]}$ ist ein Maß mit

$$\lambda\big((a,b]\big) = \sum_{m=\lfloor a \rfloor}^{\lceil b \rceil} \big(b \wedge (m+1)\big) - (a \vee m) = b - a \quad \text{für } a < b.$$

Eindeutigkeit folgt aus Satz 1.18 (die Menge der Intervalle $(a,b]$ ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, vgl. Bsp. 1.8; λ ist σ-endlich, wähle z.B. $C_n := [-n,n], n \in \mathbb{N}$ als $\mathbb{R}$ ausschöpfende Folge). □

Bemerkung 1.30.

1. Das Lebesgue-Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist translationsinvariant, d.h. $\lambda(A + x) = \lambda(A)$ für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$.

2. (Analogon von Satz 1.27 für allgemeine endliche Maße) Jede beschränkte, nicht-fallende, rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ steht via

$$\mu_F\big((-\infty, x]\big) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

in eindeutiger Beziehung zu einem endlichen Maß μ_F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

[4] Henri Lebesgue, 1875–1941

3. (Lebesgue-Stieltjes-Maße) Zu $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht-fallend und rechtsstetig gibt es genau ein Maß μ_F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit
$$\mu_F\big((a,b]\big) = F(b) - F(a), \quad -\infty < a < b < \infty.$$
Betrachte dazu (analog zum Beweis von Satz 1.29) $F_m(x) = F\big((x \wedge m) \vee (m-q)\big) - F(m-1)$, $m \in \mathbb{Z}$ und zugehöriges μ_{F_m} aus 2), $\mu_F := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mu_{F_m}$ leistet das Gewünschte.

   Eindeutigkeit folgt aus Satz 1.18.

Zum d-dimensionalen Fall:

Definition 1.31. $F : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ heißt eine *d-dimensionale Verteilungsfunktion*, wenn es folgenden Bedingungen genügt:

1. F rechtsstetig, d.h. $x_n \searrow x$ (koordinatenweise) $\Rightarrow F(x_n) \to F(x)$
2. $F(x_n) \to 1$ wenn $x_n \to (+\infty, \dots, +\infty)$
3. $F(x_n) \to 0$ wenn $\min_{i=1,\dots,d} x_{n,i} \to -\infty$
4. Für $x = (x_1, \dots, x_d) < y = (y_1, \dots, y_d)$ (koordinatenweise), parametrisiere die Ecken des d-Quaders $(x, y]$ mit $\{1,2\}^d$ via $\big\{u = (z_1^{(i_1)}, \dots, z_d^{(i_d)}) : i_1, \dots, i_d \in \{1,2\}\big\}$ wo $z_j^{(1)} = x_j$, $z_j^{(2)} = y_j$, es muss gelten
$$\sum_{u \text{ Ecken}} (-1)^{\#\{1 \le m \le d : i_m = 1\}} F(u) \Big(= \mu_F\big((x,y]\big)\Big) \ge 0$$

Satz 1.32. *W'maße auf* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *und d-dimensionale Verteilungsfunktionen F stehen in* 1-1-*Beziehung via*
$$\mu_F\big((-\infty, x]\big) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Beweisskizze. Beweis analog zum Beweis von Satz 1.27, man verwendet als Algebra
$$\mathscr{G} = \Big\{ \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} I_{j,1} \times I_{j,2} \times \dots \times I_{j,d} : n \in \mathbb{N}, I_{j,k} \in J \Big\},$$
die Menge der endlichen Vereinigungen (ggfs. verallgemeinerter) d-dimensionaler Quader. □

Korollar 1.33 (d-dimensionale Produktmaße)**.** *Seien $\mu_1, \dots, \mu_d$ W'maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, dann gibt es genau ein W'maß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit*
$$\mu\big((-\infty, x]\big) = \prod_{i=1}^{d} \mu_i\big((-\infty, x_i]\big), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$
Man schreibt $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_d$, es gilt
$$\mu(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_d) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_1) \cdot \dots \cdot \mu_d(A_d), \quad A_1, \dots, A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{1.6}$$

Beweis. Sei F_i die Verteilungsfunktion von μ_i, $i = 1, \dots, d$,

$$F(x) := F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_d(x_d), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Zeige: F ist d-dim. Verteilungsfunktion:
$a = (a_1, \dots, a_d) < (b_1, \dots b_d) = b$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^d \mathbf{1}(a_i < x_i \le b_i) &= \prod_{i=1}^d \big(\mathbf{1}(x_i \le b_i) - \mathbf{1}(x_i \le a_i)\big)\\ &= \sum_{K\subset\{1,\dots,d\}} (-1)^{|K|}\mathbf{1}\big(x \le e(a,b,K)\big)\end{aligned}$$

mit $e(a,b,K)_i = \begin{cases} a_i, & i \in K,\\ b_i, & i \notin K\end{cases}$

F erfüllt

$$\begin{aligned}\sum_{K\subset\{1,\dots,d\}} (-1)^{|K|}F\big(e(a,b,K)\big) &= \sum_{K\subset\{1,\dots,d\}} (-1)^{|K|}\Big(\prod_{i\in K} F_i(a_i)\Big)\Big(\prod_{i\notin K} F_i(b_i)\Big)\\ &= \prod_{i=1}^d \big(F(b_i) - F(a_i)\big) \ge 0\end{aligned}$$

für beliebiges $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$, d.h. F ist d-dim. Verteilungsfunktion.

Zur Formel (1.6): Nach obigen gilt (1.6), wenn $A_i = (-\infty, x_i]$ für gewisse $x_i \in \mathbb{R}$. Seien $x_2, \dots, x_d$ fixiert, betrachte für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu_1'(A) := \mu\big(A \times (-\infty, x_2] \times (-\infty, x_3] \times \cdots \times (-\infty, x_d]\big), \quad \mu_1''(A) := \mu_1(A)\prod_{i=2}^d \mu\big((-\infty, x_i]\big).$$

μ_1' und μ_1'' *sind* Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, die auf allen Halbintervallen der Form $(-\infty, x_1]$ übereinstimmen, nach Satz 1.18 gilt somit $\mu_1' = \mu_1''$, d.h. in (1.6) dürfen wir $(-\infty, x_1]$ durch eine allgemeine Borel-Menge A_1 ersetzen.

Fixieren wir nun $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $x_3, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ und betrachten für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu_2'(A) := \mu\big(A_1 \times A \times (-\infty, x_3] \times \cdots \times (-\infty, x_d]\big), \quad \mu_2''(A) := \mu_1(A_1)\mu_2(A)\prod_{i=3}^d \mu\big((-\infty, x_i]\big),$$

so folgt analog $\mu_2' = \mu_2''$, d.h. in (1.6) dürfen wir $(-\infty, x_1]$ und $(-\infty, x_2]$ jeweils durch eine allgemeine Borel-Menge A_1 bzw. A_2 ersetzen. Iteration dieses Arguments zeigt (1.6) allgemein. □

Satz 1.34 (d-dimensionales Lebesguemaß)**.** *Es gibt genau ein translationsinvariantes Maß λ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit $\lambda\big((0,1]^d\big) = 1$.*

Beweis. Als Übung. □

Definition 1.35 (Nullmengen)**.** $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ Maßraum. $N \in \mathscr{A}$ heißt (μ-)Nullmenge, wenn $\mu(N) = 0$ gilt.

$$\mathscr{N}_\mu := \{N \subset \Omega : \exists\, A \in \mathscr{A} \text{ mit } N \subset A \text{ und } \mu(A) = 0\}$$

Offenbar gilt

$$N_1, N_2, \dots \in \mathscr{N}_\mu \;\Rightarrow\; \bigcup_j N_j \in \mathscr{N}_\mu$$

Sprechweisen μ-fast überall (abgekürzt μ-f.ü.), bzw. auch μ-fast sicher, abgekürzt μ-f.s., wenn μ ein W'maß ist: Eine Eigenschaft

$$E(\omega) \text{ gilt } \mu\text{-f.ü., wenn } \big\{\omega \in \Omega : E(\omega) \text{ gilt nicht }\big\} \in \mathscr{N}_\mu$$

Für $A, B \in \mathscr{A}$ schreibt man $A = B \pmod{\mu}$, wenn $A \Delta B \in \mathscr{N}_\mu$.

Bericht 1.36 (Maßvervollständigung, siehe z.B. [Kl, Bem. 1.70])**.**

$$\mathscr{A}_\mu = \sigma\big(\mathscr{A} \cup \mathscr{N}_\mu\big) = \big\{B \subset \Omega : \exists\, A \in \mathscr{A} : \; A\Delta B \in \mathscr{N}_\mu\big\}$$

ist eine σ-Algebra und

$$\mu(B) := \mu(A) \quad \text{wenn } A \in \mathscr{A} \text{ mit } A\Delta B \in \mathscr{N}_\mu$$

ist wohldefinierte Fortsetzung von μ auf $\mathscr{A}_\mu$.

1.3 Messbare Funktionen, Zufallsvariablen

Definition 1.37. $(\Omega, \mathscr{A})$, $(\Omega', \mathscr{A}')$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt $\mathscr{A}$-$\mathscr{A}'$-*messbar* (oft auch nur *messbar*, wenn die beteiligten σ-Algebren aus dem Kontext klar sind), wenn gilt

$$\forall\, B \in \mathscr{A}' : \; f^{-1}(B) = \big\{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\big\} \in \mathscr{A}.$$

Beobachtung 1.38. 1. (*Indikatorfunktion*). $A \in \mathscr{A}$, $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$,

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A, \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

ist messbar ($\mathbf{1}_A^{-1}(\{0\}) = A^c, \mathbf{1}_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathscr{A}$).

2. (Komposition messbarer Abbildungen). $(\Omega_1, \mathscr{A}_1), (\Omega_2, \mathscr{A}_2), (\Omega_3, \mathscr{A}_3)$ messbare Räume, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ und $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ seien ($\mathscr{A}_1$-$\mathscr{A}_2$- bzw. $\mathscr{A}_2$-$\mathscr{A}_3$-)messbar. Dann ist $h := g \circ f$ ($\mathscr{A}_1$-$\mathscr{A}_3$-)messbar, denn für $B \in \mathscr{A}_3$ ist

$$h^{-1}(B) = f^{-1}\big(\underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathscr{A}_2}\big) \in \mathscr{A}_1.$$

Beobachtung und Definition 1.39 (Erzeugte σ-Algebra)**.** Sei $(\Omega', \mathscr{A}')$ messbarer Raum, $\Omega \neq \emptyset$, $h : \Omega \to \Omega'$.

$$\sigma(h) = \left\{h^{-1}(B) : B \in \mathscr{A}'\right\}$$

ist die kleinste σ-Algebra auf Ω, bezüglich der h messbar ist. (Falls $\mathscr{A}$ σ-Algebra auf Ω und h $\mathscr{A}$-$\mathscr{A}'$-messbar, so gilt natürlich $\sigma(h) \subset \mathscr{A}$.)

$\sigma(h)$ heißt die von h *erzeugte σ-Algebra*.

Sind allgemeiner $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$, $i \in I$ messbarere Räume und $h_i : \Omega \to \Omega_i$ (I beliebige Indexmenge), so bezeichnet $\sigma(h_i, i \in I)$ die kleinste σ-Algebra auf Ω, bezüglich der alle h_i, $i \in I$ messbar sind.

Lemma 1.40 (Messbarkeit auf Erzeugermenge genügt)**.** *$f : \Omega \to \Omega'$, $\mathscr{E}' \subset 2^{\Omega'}$ mit $\sigma(\mathscr{E}') = \mathscr{A}'$, so ist f $\mathscr{A}$-$\mathscr{A}'$-messbar g.d.w.*

$$\forall\, B \in \mathscr{E}' : \; f^{-1}(B) = \left\{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\right\} \in \mathscr{A}.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ : ✓
„$\Leftarrow$“ : $\widetilde{\mathscr{A}} := \left\{B \subset \Omega' : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\right\}$ *ist* eine σ-Algebra, n. Vor. gilt $\sigma(\mathscr{E}') = \mathscr{A}'$, also auch $\widetilde{\mathscr{A}} = \mathscr{A}'$. □

Im Fall reellwertiger Funktionen lassen wir oft auch die Werte $+\infty$ oder $-\infty$ zu (Übergang von $\mathbb{R}$ zu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \uplus \{-\infty\} \uplus \{+\infty\}$). Man spricht dann auch von „numerischen Funktionen“.

Korollar 1.41. *1. Insbesondere für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (wobei $\mathbb{R}$ die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ trägt) genügt es (mit Bsp. 1.8) zu prüfen, dass*

$$f^{-1}(I) \in \mathscr{A} \quad \text{für alle Intervalle } I = [a, b]$$

(oder auch für alle offenen Intervalle, oder für alle Halbintervalle $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, etc.) gilt.

2. (Topologischer Fall). Wenn $f : \Omega \to E$, wobei E topologischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$, so genügt für Messbarkeit

$$f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathscr{A} \text{ für jedes offene } \mathcal{O} \subset E.$$

Insbesondere: falls Ω selbst ein topologischer Raum (versehen mit seiner Borel-σ-Algebra) ist, so sind sind alle stetigen Abbildungen messbar.

Definition 1.42 (Produktraum, Produkt-σ-Algebra)**.** I endl. oder abzählbar, $(S_i, \mathscr{A}_i)$, $i \in I$ messbare Räume $S = \times_{i\in I} S_i = \left\{s = (s_i)_{i\in I} : s_i \in S_i\right\}$,

$$\mathscr{A}_\otimes := \sigma\Big(\Big\{\bigtimes_{i\in I} A_i : A_i \in \mathscr{A}_i\Big\}\Big)$$

(die von den „verallgemeinerten Quadern“ erzeugte σ-Algebra) heißt die *Produkt-σ-Algebra* (der $\mathscr{A}_i$).

Mit den Koordinatenabbildungen (oder Projektionsabbildungen) $\pi_i : S \to S_i$, $\pi_i\big((s_j)_{j\in I}\big) = s_i$ ist $\mathscr{A}_\otimes = \sigma(\pi_i, i \in I)$.

Lemma 1.43 (Messbarkeit im Produktfall). *S wie in Def. 1.42, $f : \Omega \to S$, $f(\omega) = \big(f_i(\omega)\big)_{i\in I}$ ist messbar g.d.w.*

$$f_i : \Omega \to S_i \quad \textit{messbar für jedes } i \in I.$$

Beweis. „$\Rightarrow$" : $\pi_i : S \to S_i$ *ist* messbar, mit Beob. 1.38 daher auch $f_i = \pi_i \circ f$

„$\Leftarrow$" : Mengen $A = \bigtimes_{i\in I} A_i$ mit $A_i \in \mathscr{A}_i$ erzeugen $\mathscr{A}_\otimes$ und für ein solches A ist

$$f^{-1}(A) = \big\{\omega \in \Omega : f_i(\omega) \in A_i, i \in I\big\} = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(A_i) \in \mathscr{A}_\otimes$$

n. Vor., Beh. folgt mit Lemma 1.40. □

Beobachtung 1.44. $S = \overline{\mathbb{R}}^\infty$, inf : $S \to \mathbb{R}$ mit $\inf\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \inf_n x_n$ und sup : $S \to \mathbb{R}$ mit $\sup\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sup_n x_n$ sind $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^\infty)$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar:

Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \inf^{-1}\big([x,\infty]\big) &= [x,\infty] \times [x,\infty] \times [x,\infty] \times \cdots \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^\infty), \\ \sup^{-1}\big([-\infty,x]\big) &= [-\infty,x] \times [-\infty,x] \times [-\infty,x] \times \cdots \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^\infty). \end{aligned}$$

Lemma 1.45. *E topologischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$, $f_1, f_2, \dots : \Omega \to E$ seien ($\mathscr{A}$-$\mathcal{B}(E)$-) messbar, $f : \Omega \to E$ und es gelte*

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \quad \textit{für alle } \omega \in \Omega$$

Dann ist f ($\mathscr{A}$-$\mathcal{B}(E)$-)messbar.

Beweis. Sei $\mathcal{O} \subset E$ offen, dann ist

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_n \bigcap_{m\geq n} f_m^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathscr{A}$$

□

Definition 1.46 (Elementare Funktionen). $(\Omega, \mathscr{A})$ messbarer Raum. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ der Form $f(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$ heißt eine *elementare Funktion*.

Lemma 1.47. $(\Omega, \mathscr{A})$ *messbarer Raum.*

1. *Elementare Funktionen sind messbar.*
2. *Für $\mathscr{A}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbares $f : \Omega \to [0,\infty]$ gibt es eine Folge von elementaren Funktionen f_n mit $f_n \nearrow_{n\to\infty} f$.*
3. *Jedes $\mathscr{A}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbare $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ kann punktweise durch elementare Funktionen approximiert werden.*

Beweis. 1. Schreibe $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ und o.E. seien die A_i paarweise disjunkt mit $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, dann ist $f^{-1}(B) = \bigcup_{i:a_i \in B} A_i \in \mathscr{A}$ für $B \subset \mathbb{R}$.

2. Wähle z.B. $f_n(\omega) = \big(2^{-n}\lfloor 2^n f(\omega)\rfloor\big) \wedge n$.

3. Zerlege $f = f^+ - f^-$, dann verwende 2. □

Lemma 1.48 (Faktorisierungslemma). *$(\Omega, \mathscr{A})$, $(\Omega', \mathscr{A}')$ messbare Räume, $f : \Omega \to \Omega'$ ($\mathscr{A}$-$\mathscr{A}'$-)messbar. Dann ist $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma(f)$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar g.d.w.*

$$\textit{es gibt ein } \mathscr{A}'\text{-}\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \textit{ messbares } h : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}} \textit{ mit } g = h \circ f.$$

Beweis. „$\Leftarrow$“ : ✓

„$\Rightarrow$“ : Sei zunächst $g \geq 0$. Zeige: Es gibt $A_1, A_2, \dots \in \sigma(f)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in [0, \infty)$ mit

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{1}_{A_n} \tag{1.7}$$

Sei dazu $g_n := \big(2^{-n}\lfloor 2^n g\rfloor\big) \wedge n$, $B_{n,i} := \{\omega : g_n(\omega) - g_{n-1}(\omega) = i2^{-n}\}$, $i = 0, 1, \dots, 2^n$ ($B_{n,i} \in \sigma(f)$ n. Vor.), also

$$g_n - g_{n-1} = \sum_{i=0}^{2^n} i2^{-n} \mathbf{1}_{B_{n,i}}$$

Umsummieren $(n, i) \mapsto m \in \mathbb{N}$ liefert

$$g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - g_{n-1}) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \mathbf{1}_{A_m}$$

mit geeigneten $\alpha_m \in [0, \infty)$, $A_m \in \sigma(f)$.

Wegen $A_m \in \sigma(f)$ gibt es $B_m \in \mathscr{A}'$ mit $f^{-1}(B_m) = A_m$, setze

$$h := \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \mathbf{1}_{B_m}$$

Im allgemeinen Fall wähle zu g^+, g^- wie oben h^+, h^-, setze $h := h^+ - h^-$. □

Definition 1.49 (Bildmaß). $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ Maßraum, $(\Omega', \mathscr{A}')$ messbarer Raum, $f : \Omega \to \Omega'$ messbar.

$$\mathscr{A}' \ni A' \mapsto \mu\big(f^{-1}(A')\big)$$

ist ein Maß auf $(\Omega', \mathscr{A}')$, es heißt das *Bildmaß* von μ unter f und wird mit $\mu \circ f^{-1}$ bezeichnet (manchmal schreibt man auch $f(\mu)$).

1.3.1 Erinnerung: Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation

Definition 1.50. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ W'raum, $(S, \mathscr{A})$ messbarer Raum. $A \in \mathscr{F}$ heißen *Ereignisse*, eine ($\mathscr{F}$-$\mathscr{A}$-)messbare Abbildung $X : \Omega \to S$ heißt eine *Zufallsvariable* (mit Werten in S), oft kürzt man Zufallsvariable als ZV ab, auch die Benennung *Zufallsgröße* ist verbreitet.

Für $B \in \mathscr{A}$ schreibt man

$$\{X \in B\} := X^{-1}(B) \quad (\in \mathscr{F})$$

für das Ereignis „X nimmt einen Wert in B an".

Das Bildmaß $\mathbb{P} \circ X^{-1}$ heißt die *Verteilung* von X, man schreibt auch $\mathscr{L}(X)$ und $X \sim \mu$, falls $\mathbb{P} \circ X^{-1} = \mu$.

Beispiel 1.51. 1. μ W'maß auf $(S, \mathscr{A})$, so ist $X = \mathrm{Id}_S$ ZV auf $(S, \mathscr{A}, \mu)$ mit $X \sim \mu$.

Insbesondere ist $U := \mathrm{Id}_{[0,1]}$ eine uniform auf $[0,1]$ verteilte ZV auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{[0,1]})$.

2. F Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$, so gibt es eine ZV X auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathbb{P})$, $\mathbb{P} = \lambda_{[0,1]}$, mit $\mathbb{P}(X \leq x) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Kapitel 2

Unabhängigkeit

Definition 2.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ W'raum.

1. $\mathscr{C}_i \subset \mathscr{F}$, $i \in I$ (I beliebige Indexmenge) heißen *unabhängig*, wenn für jedes endliche $J \subset I$, $J \neq \varnothing$
$$\text{für beliebige } A_j \in \mathscr{C}_j,\ j \in J \ \text{ gilt } \ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$
2. Ereignisse $A_i \in \mathscr{F}$, $i \in I$ heißen unabhängig, wenn dies für $\mathscr{C}_i := \{\varnothing, A_i, A_i^c, \Omega\}$ gilt.
3. ZVn X_i, $i \in I$ heißen unabhängig, wenn $\sigma(X_i)$, $i \in I$ unabhängig sind.

Lemma 2.2. $\mathscr{C}_i \subset \mathscr{F}$, $i \in I$, $\mathscr{C}_i \cup \{\varnothing\}$ *seien* $\cap$*-stabil. Dann gilt*
$$(\mathscr{C}_i, i \in I) \text{ u.a.} \quad \text{g.d.w.} \quad (\sigma(\mathscr{C}_i), i \in I) \text{ u.a.}$$

Beweis. (Es ist nur „$\Rightarrow$" zu zeigen). Wir zeigen: Für $J \subset J' \subset I$, $|J'| < \infty$ gilt
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J'} A_j\Big) = \prod_{j \in J'} \mathbb{P}(A_j) \quad \text{für jede Wahl} \begin{cases} A_j \in \sigma(\mathscr{C}_j), & j \in J, \\ A_j \in \mathscr{C}_j, & j \in J' \setminus J \end{cases} \tag{2.1}$$
per Induktion nach $n := |J|$.

Nach Voraussetzung gilt (2.1) für $n = 0$.

Nehmen wir an, (2.1) ist für alle J mit $n := |J|$ erfüllt. Betrachte $\widetilde{J} := J \cup \{j_0\}$ wo $|J| = n$ und $j_0 \in I \setminus J$; sei $J \subset J' \subset I$.

Seien $A_j \in \sigma(\mathscr{C}_j)$ für $j \in J$, $A_j \in \mathscr{C}_j$ für $j \in J' \setminus \widetilde{J}$, betrachte folgende Maße (auf $(\Omega, \mathscr{F})$):
$$\mu(A) := \mathbb{P}\Big(A \cap \bigcap_{j \in J' \setminus \{j_0\}} A_j\Big), \quad \widetilde{\mu}(A) := \mathbb{P}(A) \cdot \prod_{j \in J' \setminus \{j_0\}} \mathbb{P}(A_j), \quad A \in \mathscr{F}.$$
Nach Induktionsannahme stimmen μ und $\widetilde{\mu}$ auf $\mathscr{C}_{j_0} \cup \{\varnothing, \Omega\}$, das ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\sigma(\mathscr{C}_{j_0})$ ist, überein, mit Satz 1.18 also
$$\mu = \widetilde{\mu} \text{ auf } \sigma(\mathscr{C}_{j_0}),$$
d.h. (2.1) gilt für $n + 1$. $\square$

Bemerkung 2.3. 1. $\mathscr{F} \ni A_i, i \in I$ sind u.a. gd.w.

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j) \quad \text{für jedes endliche } J \subset I.$$

2. $\mathscr{C}_i \subset \mathscr{F}, i \in I$ u.a., $I = \dot\bigcup_{k\in K} I_k$ (wobei K eine beliebige Menge ist), so sind auch $\widetilde{\mathscr{C}_k} := \bigcup_{i\in I_k} \mathscr{C}_i$, $k \in K$ unabhängig.

Beweis. 1. folgt aus Lemma 2.2, denn $\{A_i\}$ ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger der σ-Algebra $\{\varnothing, A_i, A_i^c, \Omega\}$.
2. ✓ (zu $A_j \in \widetilde{\mathscr{C}_{k_j}}, j = 1, \ldots, n$ mit $k_1, \ldots, k_n$ paarw. verschieden gibt es $i_1, \ldots i_n$ paarw. verschieden mit $A_j \in \mathscr{C}_{i_j}$)

□

Beispiel. 1) $X_1, X_2, \ldots, X_d$ reellwertige ZVn sind u.a. g.d.w.

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{d}\{X_j \le x_j\}\Big) = \prod_{j=1}^{d} \mathbb{P}(X_j \le x_j) \quad \text{für alle } x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

(d.h. g.d.w. ihre gemeinsame Verteilungsfunktion Produktgestalt hat).

2) $X_i, i \in I$ diskrete ZVn, d.h. $X_i : \Omega \to S_i$ messbar (wobei S_i endlich oder abzählbar, mit σ-Algebra $\mathscr{A} = 2^{S_i}$).

$(X_i, i \in I)$ unabhängig g.d.w.

$$\text{für } J \subset I, |J| < \infty,\ x_j \in S_j \ \text{ gilt } \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J}\{X_j = x_j\}\Big) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(X_j = x_j).$$

2.1 Asymptotische Ereignisse

In diesem Abschnitt geht es um Ereignisse, die gewissermaßen (wenn man bei der Nummerierung an einen Zeitablauf denkt) „unendlich spät" entschieden werden.

Definition 2.4. Seien $A_1, A_2, \ldots$ Ereignisse,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\ge1} \bigcup_{m\ge n} A_m$$

(„unendlich viele der A_n treten ein"),

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\ge1} \bigcap_{m\ge n} A_m$$

(„von einem (möglicherweise zufälligen) Index ab treten alle A_n ein").

Beachte: Es ist $\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c$, also mit Indikatorvariablen ausgedrückt

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(\omega), \quad \liminf_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \mathbf{1}_{\liminf_n A_n}(\omega).$$

Lemma 2.5 (Lemma von Borel-Cantelli[1]). *Seien* $A_1, A_2, \dots$ *Ereignisse,* $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad P(A) = 0$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ *und die* $A_1, A_2, \dots$ *seien unabhängig* $\quad \Longrightarrow \quad P(A) = 1$

Beweis. 1. Für jedes n ist

$$0 \le \mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}\Big(\bigcup_{m\ge n} A_m\Big) \le \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_m) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also gilt $\mathbb{P}(A) = 0$.

2. Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{m\ge n} A_m^c\Big) &= \lim_{n'\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{m=n}^{n'} A_m^c\Big) = \lim_{n'\to\infty} \prod_{m=n}^{n'} \big(1 - \mathbb{P}(A_m)\big) \\ &= \prod_{m=n}^{\infty} \big(1 - \mathbb{P}(A_m)\big) = \exp\Big(\sum_{m=n}^{\infty} \log\big(1 - \mathbb{P}(A_m)\big)\Big) \\ &\le \exp\Big(-\sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_m)\Big) = 0\end{aligned}$$

für jedes n (verwende $\log(1-x) \le -x$ für $x \in [0,1]$), also $\mathbb{P}(A^c) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{m\ge n} A_m^c\Big) = 0$. □

Beispiel 2.6. Seien $X_1, X_2, \dots$ u.a, $\{0,1\}$-wertig mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i \in (0,1)$, so gilt

$$\{X_i = 1 \ \infty\text{-oft}\} \text{ f.s.} \quad \text{g.d.w.} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty.$$

(Dies ist insbesondere erfüllt, wenn $p_i \equiv p > 0$: wenn man eine p-Münze unendlich oft wirft, wird man mit Sicherheit unendlich viele Erfolge beobachten.

Andererseits: Mit $A_n := \{X_1 = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ ist $\limsup_n A_n = A_1$, also $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = p_1 \in (0,1)$, d.h. man kann in Lemma 2.5, 2. nicht (ohne weitere Voraussetzungen) auf die Unabhängigkeit verzichten.

Definition 2.7. $(\Omega, \mathscr{A})$ messbarer Raum, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots \subset \mathscr{A}$ Teil-σ-Algebren.

$$\mathscr{T} := \cap_{n\ge 1} \mathscr{T}_n \quad \text{mit } \mathscr{T}_n := \sigma(\mathscr{A}_n, \mathscr{A}_{n+1}, \mathscr{A}_{n+2}, \dots)$$

heißt die (von der Folge $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots$ erzeugte) *terminale σ-Algebra*.

[1] nach Émile Borel (1871–1956) und Francesco Cantelli (1875–1966)

Beispiel 2.8. X_n reellwertige ZVn (auf $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$), $\mathscr{A}_n = \sigma(X_n)$. Dann sind

$$\{\limsup_n X_n \le c\}, \{(X_n) \text{ konvergiert}\} = \{\liminf_n X_n \ge \limsup_n X_n\},$$
$$\Big\{ \sum_n |X_n| < \infty \Big\}, \Big\{ \sum_n X_n \text{ konvergiert} \Big\} \in \mathscr{T}.$$

Satz 2.9 (Kolmogorovs 0-1-Gesetz)**.** $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *W'raum,* $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots \subset \mathscr{A}$ *(unter* $\mathbb{P}$*) unabhängige Teil-*σ*-Algebren. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\} \quad \textit{für alle } A \in \mathscr{T}.$$

(Man sagt: „$\mathscr{T}$ *ist trivial“).*

Beweis. Sei $\sigma_n := \sigma(\mathscr{A}_1, \dots, \mathscr{A}_n)$, für $n \in \mathbb{N}$ sind σ_n und $\mathscr{T}_{n+1}$ unabhängig (nach Bem. 2.3), also sind auch σ_n und $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{n+1}$ unabhängig.

$\sigma_\infty := \bigcup_{n=1}^\infty \sigma_n$ ist eine $\cap$-stabile Erzeugermenge von $\sigma(\mathscr{A}_k, k \in \mathbb{N})$ [beachte: für $A, B \in \sigma_\infty$ gibt es ein n mit $A, B \in \sigma_n$, daher auch $A \cap B \in \sigma_n \subset \sigma_\infty$], und σ_∞ ist unabhängig von $\mathscr{T}$, nach Lemma 2.2 also

$$\mathscr{T} \text{ und } \sigma(\mathscr{A}_k, k \in \mathbb{N}) \supset \mathscr{T} \text{ sind u.a.,}$$

insbesondere für $A \in \mathscr{T}$:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A).$$

□

Beispiel. Seien $X_1, X_2, \dots$ u.a. reelle ZVn, dann ist $\mathbb{P}\big(\sum_{n=1}^\infty X_n \text{ konvergiert}\big) \in \{0, 1\}$.

Kapitel 3

Integral und Erwartungswert

Sei $(S, \mathscr{A}, \mu)$ Maßraum.

Notation. Für $f, g : S \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, $z \in \overline{\mathbb{R}}$ schreiben wir

$$\begin{aligned} &\{f \in A\} := f^{-1}(A), \quad \{f = z\} := f^{-1}(\{z\}), \\ &\{f = g\} := \{x \in S : f(x) = g(x)\} = (f - g)^{-1}(\{0\}), \\ &\{f \geq g\} := \{x \in S : f(x) \geq g(x)\} = (f - g)^{-1}([0, \infty]), \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Definition und Beobachtung 3.1 (Elementares Integral)**.** Für

$$f \in \mathcal{E}^+ := \{\text{nicht-negative elementare Funktionen}\}$$

mit Darstellung $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ ($a_i \in \mathbb{R}_+$, $A_i \in \mathscr{A}$) ist

$$I(f) := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{z \in f(S)} z \mu\big(\{f = z\}\big)$$

(mit Konvention $0 \cdot \infty = 0$) wohldefiniert.

Beweis. Sei

$$\{C_1, \dots, C_m\} = \Big\{ \bigcap_{j=1}^n B_j : B_j = A_j \text{ oder } B_j = A_j^c \Big\} \setminus \{\varnothing\},$$

d.h. die C_k sind paarweise disjunkt mit $S = \dot\bigcup_{k=1}^m C_k$ und für $i = 1, \dots, n$ gibt es $J_i \subset \{1, \dots, m\}$ mit

$$A_i = \dot\bigcup_{k \in J_i} C_k$$

Für $x \in C_k$ ist

$$f(x) = \sum_{i : J_i \ni k} a_i =: \gamma_k$$

Sei $f(S) = \{\gamma_k : k = 1, \dots, m\} = \{z_1, \dots, z_\ell\}$, für $j = 1, \dots, \ell$ setze

$$G_j := \big\{k \in \{1, \dots, m\} : \gamma_k = z_j\big\}$$

$$\begin{aligned}\sum_i a_i\mu(A_i) &= \sum_i \sum_{k\in J_i} a_i\mu(C_k) = \sum_k \mu(C_k) \sum_{i:k\in J_i} a_i \\ &= \sum_k \gamma_k\mu(C_k) = \sum_j z_j\mu\Big(\bigcup_{k\in G_j} C_k\Big) = \sum_j z_j\mu\big(\{f=z_j\}\big)\end{aligned}$$

□

Definition 3.2. Für $f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt

$$\int f\,d\mu := \sup\left\{I(h) : h \in \mathcal{E}^+, h \le f\right\}$$

das Integral[1] von f bezüglich μ.

(Manchmal schreibt man auch $\mu(f) := \int f\,d\mu$ oder auch $\int f(x)\,\mu(dx)$, wenn die „Integrationsvariable" betont werden soll.)

Beobachtung 3.3 (Markov-Ungleichung[2])**.** Für $f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar, $a > 0$ gilt

$$\mu\big(\{f \ge a\}\big) \le \frac{1}{a}\int f\,d\mu$$

(denn $\mathcal{E}^+ \ni h := a\mathbf{1}_{f^{-1}([a,\infty])} \le f$, also $I(h) = a\mu\big(\{f \ge a\}\big) \le \int f\,d\mu$).

Lemma 3.4. *$f, g : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar.*

i) $f \le g$ μ-f.ü. $\Longrightarrow \int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$.

ii) $f = g$ μ-f.ü. $\Longrightarrow \int f\,d\mu = \int g\,d\mu$.

iii) $f = 0$ μ-f.ü. $\Longleftrightarrow \int f\,d\mu = 0$.

iv) $\int f\,d\mu < \infty \Longrightarrow f < \infty$ μ-f.ü.

Beweis. i) Sei h Elementarfunktion mit $h \le f$, dann ist $\widetilde{h} := h\mathbf{1}_{\{f\le g\}}$ ebenfalls Elementarfunktion und erfüllt $\widetilde{h} \le g$,

$$\begin{aligned}I(\widetilde{h}) &= \sum_{z\,(\in h(S)\setminus\{0\})} z\mu\big(\{\widetilde{h}=z\}\big) = \sum_z \mu\big(\{\widetilde{h}=z\}\cap\{f\le g\}\big) \\ &= \sum_z \mu\big(\{h=z\}\big) = I(h)\end{aligned}$$

die Beh. folgt damit aus Def. 3.2.

ii) Dies folgt aus *i)*.

iii) „$\Rightarrow$" folgt aus *ii)*, zu „$\Leftarrow$": Sei $\int f\,d\mu = 0$, dann ist

$$\mu\big(\{f \ge \tfrac{1}{n}\}\big) \le n\int f\,d\mu = 0 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ (mit Beob. 3.3)},$$
$$\mu\big(\{f>0\}\big) = \mu\big(\{f\ge 1\}\big) + \sum_{n=1}^{\infty}\mu\big(\{\tfrac{1}{n+1} \le f < \tfrac{1}{n}\}\big) = 0$$

[1] Präziser: das Lebesgue-Integral, nach Henri Lebesgue (1875–1941)
[2] nach Andrei Andrejewich Markov (1856–1922)

iv) $h := n\mathbf{1}_{\{f=\infty\}} \le f$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also

$$I(h) = n\mu\big(\{f = \infty\}\big) \le \int f\,d\mu < \infty$$

und

$$\mu\big(\{f = \infty\}\big) \le \frac{1}{n}\int f\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Lemma 3.5. *f_n, $n \in \mathbb{N}$ messbar, $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \nearrow f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, so gilt*

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$$

Beweis. Nach Lemma 3.4 ist $n \mapsto \int f_n\,d\mu$ monoton wachsend und

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu \le \int f\,d\mu.$$

Sei $\varepsilon > 0$, h Elementarfunktion mit $0 \le h \le f$,

$$h_n := (h-\varepsilon)^+\mathbf{1}_{\{f_n > h-\varepsilon\}}$$

ist Elementarfunktion mit $0 \le h_n \le f_n$,

$$I(h_n) = \sum_{\tilde{z}} \tilde{z}\mu\big(\{h_n = \tilde{z}\}\big) = \sum_z (z-\varepsilon)^+\mu\big(\{h = z, f_n > h-\varepsilon\}\big) \le \int f_n\,d\mu$$

(beachte: die Summen enthalten jeweils nur endlich viele Terme), nach Voraussetzung ist

$$\{f_n > h-\varepsilon\} \nearrow \{f > h-\varepsilon\} = S \quad \text{für } n \to \infty$$

also

$$\mu\big(\{h = z, f_n > h-\varepsilon\}\big) \underset{n\to\infty}{\nearrow} \mu\big(\{h = z\}\big)$$

und somit

$$\sum_z (z-\varepsilon)^+\mu\big(\{h = z\}\big) \le \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$$

für jedes $\varepsilon > 0$, mit $\varepsilon \downarrow 0$ auch

$$I(h) = \sum_z z\mu\big(\{h = z\}\big) \le \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$$

Def. 3.2 impliziert $\lim_n \int f_n\,d\mu \ge \int f\,d\mu$, d.h. die Behauptung.

□

(Gegen-)Beispiel. $(S, \mathscr{A}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{[0,1]})$, $f_n = n\mathbf{1}_{(0,1/n)}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 =: f(x) \quad \text{für jedes } x \in [0,1],$$

aber $\int f_n \, d\lambda_{[0,1]} = n\frac{1}{n} = 1 \not\to 0 = \int 0 \, d\lambda_{[0,1]}$

Lemma 3.6. *Sei $f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar und $f(S)$ höchstens abzählbar, dann gilt*

$$\int f \, d\mu = \sum_{z \in f(S)} z\mu\big(\{f = z\}\big)$$

(mit beliebiger Summationsreihenfolge).

Beweis. Betrachte zunächst f Elementarfunktion: Sei $0 \le h \le f$ Elementarfunktion, dann ist für $z > y$

$$\mu\big(\{f = y, h = z\}\big) = \mu(\varnothing) = 0,$$

also

$$\begin{aligned} I(h) &= \sum_z z\mu\big(\{h = z\}\big) = \sum_z \sum_y z\mu\big(\{f = y, h = z\}\big) \\ &\le \sum_z \sum_y y\mu\big(\{f = y, h = z\}\big) = \sum_y y\mu\big(\{f = y\}\big) \; \big(= I(f)\big) \end{aligned}$$

d.h. die Formel gilt in diesem Fall.

Allgemeiner Fall: Sei $y_1, y_2, \dots$ irgendeine Aufzählung von $f(S)$, $(z_n)_n \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus f(S)$ mit $z_n \nearrow \infty$,

$$f_n := \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{\{f = y_i\}} + z_n \mathbf{1}_{\{f = \infty\}}$$

also $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots \nearrow f$, Beh. folgt mit Lemma 3.5. □

Lemma 3.7. *$f, g : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ m.b., $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}_+$, so gilt*

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Beweis. 1) Seien zunächst $f(S), g(S)$ abzählbar (und somit auch $(f+g)(S)$ abzählbar):

$$\begin{aligned} \int \alpha f + \beta g \, d\mu &= \sum_z z\mu\big(\{\alpha f + \beta g = z\}\big) \\ &= \sum_z z \sum_{\substack{u,v: \\ \alpha u + \beta v = z}} \mu\big(\{f = u, g = v\}\big) = \sum_{u,v} (\alpha u + \beta v)\mu\big(\{f = u, g = v\}\big) \\ &= \alpha \sum_{u,v} u\mu\big(\{f = u, g = v\}\big) + \beta \sum_{u,v} v\mu\big(\{f = u, g = v\}\big) \\ &= \alpha \sum_u u\mu\big(\{f = u\}\big) + \beta \sum_v v\mu\big(\{g = v\}\big) = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu \end{aligned}$$

nach Lemma 3.6.

2) Allgemeiner Fall: $f_n := 2^{-n}\lfloor 2^n f \rfloor \wedge n$, $g_n := 2^{-n}\lfloor 2^n g \rfloor \wedge n$ nehmen jeweils nur endlich viele Werte an, $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow g$ für $n \to \infty$. Beh. folgt mit 1) und Lemma 3.5. □

Definition 3.8. $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar heißt *μ-integrierbar*, wenn $\int |f|\,d\mu < \infty$. Man setzt dann

$$\int f\,d\mu := \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu \quad (\in \mathbb{R})$$

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \{f : f\ \mu\text{-integrierbar}\}$$

Für $f \notin \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\int f^+\,d\mu \wedge \int f^-\,d\mu < \infty$ setzt man ebenso, wobei dann die Werte $+\infty$ oder $-\infty$ vorkommen (beachte: ist wohldefiniert).

Man schreibt auch

$$\int f(x)\,\mu(dx) := \mu(f) := \int f\,d\mu,$$

abkürzend oft auch für $A \in \mathscr{A}$

$$\int_A f\,d\mu := \int f\mathbf{1}_A\,d\mu.$$

Satz 3.9. *$f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$*

i) $|f| < \infty$ *μ-f.ü., für* $f \geq 0$ *μ-f.ü. gilt* $\int f\,d\mu = 0 \iff f = 0$ *μ-f.ü.*

ii) $f \leq g$ *μ-f.ü.* $\implies \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$, *insbesondere:* $f = g$ *μ-f.ü.* $\implies \int f\,d\mu = \int g\,d\mu$

iii) $\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$

iv) $\int af + bg\,d\mu = a\int f\,d\mu + b\int g\,d\mu$ *für* $a, b \in \mathbb{R}$

Beweis. i) Dies folgt aus Lemma 3.4, *iii)*.

ii) $f \leq g$ f.ü. $\iff f^+ \leq g^+$ f.ü. und $f^- \geq g^-$ f.ü., Beh. folgt aus Lemma 3.4, *i)*.

iii) $\left|\int f\,d\mu\right| = \left|\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\right| \leq \left|\int f^+\,d\mu\right| + \left|\int f^-\,d\mu\right| = \int \underbrace{f^+ + f^-}_{=|f|}\,d\mu$

iv) Folgt aus Lemma 3.7 (zerlege $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$). □

Bemerkung 3.10. 1. $\|f\|_1 := \int |f|\,d\mu$ definiert somit eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(\mu)$, definiert man $f \sim g$ $:\Leftrightarrow f = g$ μ-f.ü., so ist $L^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\mu)/\sim$ ein normierter Raum.

2. Im diskreten Fall $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ (mit $\mathscr{A} = 2^S$), $\mu = \sum_{n=1}^\infty a_n\delta_{x_n}$ mit $a_n \geq 0$ ist

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \left\{f : S \to \overline{\mathbb{R}} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n|f(x_n)| < \infty\right\}$$

Satz 3.11 (Monotone Konvergenz, Satz von (Beppo) Levi[3])**.** *$f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f_n \nearrow f$ μ-f.ü., dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$$

(die Gleichung ist möglicherweise als $+\infty = +\infty$ zu lesen).

[3]Beppo Levi, 1875–1961

Beweis. Sei $N \in \mathscr{A}$ mit $\mu(N) = 0$ und

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\nearrow} f(x) \quad \text{für alle } x \in S \setminus N.$$

$$0 \le \widetilde{f}_n := \mathbf{1}_{N^c}(f_n - f_1) \underset{n\to\infty}{\nearrow} \mathbf{1}_{N^c}(f - f_1)$$

also (mit Lemma 3.5)

$$\underbrace{\int \widetilde{f}_n\,d\mu}_{= \int f_n\,d\mu - \int f_1\,d\mu} \qquad d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \mathbf{1}_{N^c}(f - f_1)\,d\mu = \underbrace{\int f - f_1\,d\mu}_{= \int f\,d\mu - \int f_1\,d\mu}$$

Wegen $f_1 \le f$ μ-f.ü. gilt $f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$ unter den Voraussetzungen von Satz 3.11 automatisch, und wir entnehmen dem Argument insbesondere, dass $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ genau dann gilt, wenn $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu < \infty$ gilt. □

Satz 3.12 (Lemma von Fatou[4]). *$f, f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f_n \ge f$ μ-f.ü., so gilt*

$$\int \liminf_n f_n\,d\mu \le \liminf_n \int f_n\,d\mu$$

Beweis. O.E. seien $f_1, f_2, \dots \ge 0$ f.ü., sonst gehe über zu $f_n - f$.

Sei $g_n := \inf_{m\ge n} f_m$, dann gilt $\int g_n\,d\mu \le \int f_n\,d\mu$ für jedes n und $g_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \liminf_{k\to\infty} f_k$, also

$$\int \liminf_{k\to\infty} f_k\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu \le \liminf_n \int f_n\,d\mu$$

(wir verwenden Satz 3.11 für das Gleichheitszeichen). □

Satz 3.13 (Dominierte Konvergenz, Konvergenzsatz von Lebesgue). *$f, f_1, f_2, \dots$ messbare Funktionen, es gelte*

$$f_n \to f \ \mu\text{-f.ü.} \quad \textit{und} \quad |f_n| \le g \ \mu\text{-f.ü. für ein } g \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Dann gilt $f, f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\int \big|f_n - f\big|\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \textit{insbesondere} \int f_n\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f\,d\mu.$$

Beweis. $\int |f_n|\,d\mu, \int |f|\,d\mu \le \int g\,d\mu < \infty$, d.h. $f, f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

$$0 \le 2g - |f - f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2g \quad \mu\text{-f.ü.},$$

also

$$\int 2g\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int 2g - |f - f_n|\,d\mu = \underbrace{\int 2g\,d\mu}_{\in[0,\infty)} - \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\int |f - f_n|\,d\mu}_{\ge 0}$$

somit $\limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n|\,d\mu = 0$.

Schließlich

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int f_n\,d\mu - \int f\,d\mu \right| \le \lim_{n\to\infty} \int |f - f_n|\,d\mu = 0$$

□

[4] Pierre Fatou, 1878–1929

Satz 3.14 (Maßtransformation und Integral)**.** *$(S,\mathscr{A})$, $(S',\mathscr{A}')$ messbare Räume, μ Maß auf $(S,\mathscr{A})$, $f : S \to S'$ messbar, $\mu' := \mu \circ f^{-1}$*

Für $g \in \mathcal{L}^1(\mu')$ oder $g : S' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt

$$\int g\, d\mu' = \int g \circ f\, d\mu \tag{3.1}$$

Beobachtung 3.15 (Monotonieprinzip)**.** $(S,\mathscr{A})$ messbarer Raum, sei $\mathscr{K} \subset \{f : f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ messbar}\}$ mit

i) $a, b \in \mathbb{R}_+, f, g \in \mathscr{K} \implies af + bg \in \mathscr{K}$

ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{K}, f_n \nearrow f \implies f \in \mathscr{K}$

iii) $\mathbf{1}_A \in \mathscr{K}$ für $A \in \mathscr{A}$

Dann gilt $\mathscr{K} = \{f : f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ messbar}\}$.

(*Beweis*: Approximiere allgemeines messbares f wachsend via $\mathscr{K} \ni f_n = 2^{-n}\lfloor 2^n f\rfloor \wedge n \nearrow f$.)

Beweis von Satz 3.14. Sei $\mathscr{K}_+ = \{g : g : S' \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ messbar, (3.1) gilt für } g\}$.

Für $g = 1_{A'}$ mit $A' \in \mathscr{A}'$ gilt

$$\int g\, d\mu' = \mu'(A') = \mu\big(f^{-1}(A')\big) = \int g \circ f\, d\mu$$

nach Def., also $1_{A'} \in \mathscr{K}_+$.

$\mathscr{K}_+$ erfüllt Eigenschaft *i)* aus Beob 3.15 wegen der Linearität des Integrals (vgl. Satz 3.9) und Eigenschaft *ii)* wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz (Satz 3.11). Somit

$$\mathscr{K}_+ = \{g : g : S' \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ messbar}\}$$

Für $g \in \mathcal{L}^1(\mu')$ gilt (3.1) jeweils für g^+ und g^-. □

Bemerkung und Schreibweise. Für $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ W'raum, $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ oder $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar schreibt man

$$\mathbb{E}[X] := \int X\, d\mathbb{P} \quad \text{„Erwartungswert“ von } X$$

Für eine $(S',\mathscr{A}')$-wertige ZV Y mit Verteilung ν, $g : S' \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \in \mathcal{L}^1(\nu)$ gilt

$$\mathbb{E}\big[g(Y)\big] = \int g \circ Y\, d\mathbb{P} = \int g\, d\nu$$

Definition 3.16. μ, ν Maße auf $(S,\mathscr{A})$, $h : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar heißt (eine) *Dichte* von ν bezüglich μ, wenn gilt

$$\nu(A) = \int \mathbf{1}_A h\, d\mu, \quad A \in \mathscr{A}.$$

Man schreibt $\nu = h\mu$, symbolisch auch $d\nu = h d\mu$, $\dfrac{d\nu}{d\mu} = h$.

Lemma 3.17. *μ Maß auf $(S, \mathscr{A})$, $h : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar, so definiert*

$$\nu(A) := \int \mathbf{1}_A h \, d\mu, \quad A \in \mathscr{A}$$

ein Maß auf $(S, \mathscr{A})$ (ν ist endlich, wenn $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$), für $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ m.b. mit $f \geq 0$ μ-f.ü. oder $fh \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt

$$\int f \, d\nu = \int fh \, d\mu \tag{3.2}$$

Beweis. Offenbar $\nu(\varnothing) = 0$, seien $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A}$ paarw. disjunkt:

$$\nu\Big(\dot{\bigcup_n} A_n\Big) = \int \mathbf{1}_{\dot\bigcup_n A_n} h \, d\mu = \int \sum_n \mathbf{1}_{A_n} h \, d\mu = \sum_n \int \mathbf{1}_{A_n} h \, d\mu = \sum_n \nu(A_n)$$

mit Satz von der monotonen Konvergenz (Satz 3.11).

$$\{f : f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ messbar, (3.2) gilt für } f\}$$

erfüllt die Voraussetzungen des Monotonieprinzips (Beob 3.15), also gilt (3.2) für jedes messbare $f \geq 0$.

Falls $fh \in \mathcal{L}^1(\mu)$, so gilt (3.2) mit $hf^+ = (hf)^+$ und $hf^- = (hf)^-$ separat. □

Lemma 3.18. *$\nu = h\mu = h'\mu$ mit $h, h' : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ m.b., ν σ-endlich $\Longrightarrow h = h'$ μ-f.ü.*

Beweis. Sei ν endlich.

$$\begin{aligned} &\nu\big(\{h > h'\}\big) + \int (h - h')^+ \mu \\ &= \int \mathbf{1}_{\{h>h'\}} h' \, d\mu + \int \mathbf{1}_{\{h>h'\}} (h - h') \, d\mu \\ &= \int \mathbf{1}_{\{h>h'\}} h \, d\mu = \nu\big(\{h > h'\}\big), \end{aligned}$$

also $(h - h')^+ = 0$ μ-f.ü., analog $(h - h')^- = 0$ μ-f.ü.

Im allgemeinen Fall seien $\mathscr{A} \ni A_n \nearrow S$ mit $\nu(A_n) < \infty$, obiges zeigt

$$\int \mathbf{1}_{A_n} (h - h')^+ \, d\mu = \int \mathbf{1}_{A_n} (h - h')^- \, d\mu = 0$$

für jedes n. □

Definition 3.19. Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \Big\{f : S \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar} : |f|^p \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}\Big\}$$

und für $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ sei $\|f\|_p := \Big(\int |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p}$.

$$\|f\|_\infty := \inf\big\{M \in \mathbb{R}_+ : |f| \leq M \ \mu\text{-f.ü.}\big\}$$

heißt *essentielles Supremum* (von f bezüglich μ), $\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f : S \to \overline{\mathbb{R}} \text{ m.b.} : \|f\|_\infty < \infty\}$.

Satz 3.20 (Hölder-Ungleichung[5]). *$p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$*

Dann ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit

$$||f \cdot g||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

(Für $p = q = 2$ ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.)

Beweis. Die Fälle $p = 1, q = \infty$ (oder umgekehrt) sowie $||f||_p = 0$ oder $||g||_q = 0$ sind trivial, seien also

$$p, q > 1, \quad \alpha := ||f||_p,\ \beta := ||g||_q > 0$$

Für $a, b > 0$ gilt

$$\log(ab) = \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) \leq \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)$$

(dies folgt aus der Konkavität der Logarithmusfunktion), also

$$\frac{|f(x)|}{\alpha} \cdot \frac{|g(x)|}{\beta} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\beta^q},$$

somit

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int |fg|\, d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Satz 3.21 (Jensen'sche Ungleichung[6]). *$(S, \mathscr{A}, \mu)$ W'raum, $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann ist $\int k \circ f\, d\mu$ wohldefiniert und es gilt*

$$\int k \circ f\, d\mu \geq k\Big(\int f\, d\mu\Big)$$

Beweis. Erinnerung:

$$k \text{ ist konvex} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \alpha \in [0,1] :\ \alpha k(x) + (1-\alpha)k(y) \geq k(\alpha x + (1-\alpha)y)$$

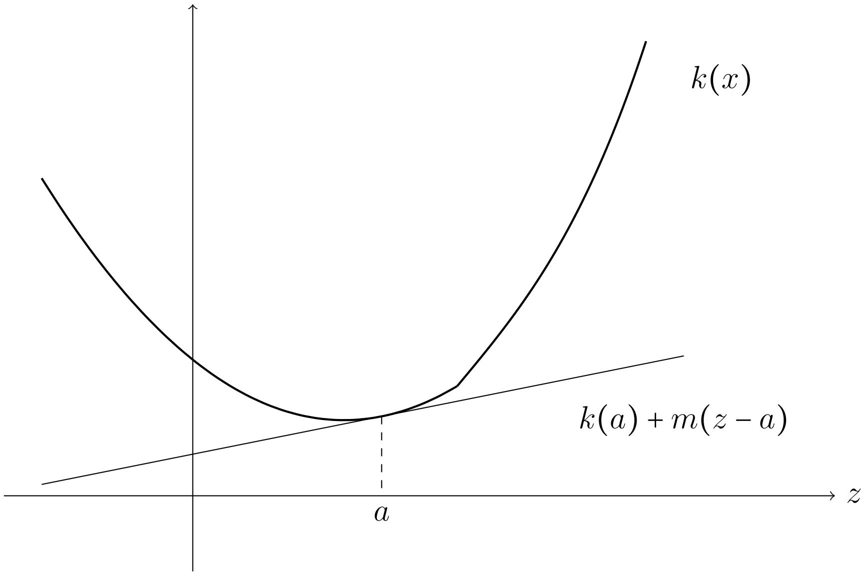
und zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es $m = m(a) \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall\, z \in \mathbb{R} :\ k(a) + m(z - a) \leq k(z)$$

gilt (eine konvexe Funktion liegt oberhalb jeder ihrer Tangenten) .

[5] Otto Hölder, 1859–1937

[6] nach Johan Ludvig Jensen, 1859–1925 benannt



Seien a, m wie oben, so ist

$$\big(k \circ f\big)^- \leq \big(k(a) + m(f-a)\big)^- \leq |k(a)| + |m|\big(|f| + |a|\big)$$

also $\int \big(k \circ f\big)^- \, d\mu < \infty$ und

$$\int \big(k \circ f\big)(x)\, \mu(dx) \geq k(a) + m\Big(\int f(x)\, \mu(dx) - a\Big),$$

die Wahl $a = \int f \, d\mu$ liefert die Behauptung.

(Da $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, gilt $\mu(\{|f| < \infty\}) = 1$ und man kann den Wert von $k \circ f$ auf der μ-Nullmenge $\{|f| = \infty\}$ beispielsweise $= 0$ setzen, ohne die Aussage zu ändern. Alternativ kann man beobachten, dass für eine konvexe Funktion k stets $k(\infty) = \lim_{x\to\infty} k(x), k(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} k(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existieren.) □

Definition 3.22 (Konvergenzarten)**.** $(S, \mathscr{A}, \mu)$ Maßraum, $f,\ f_1, f_2, \dots : S \to \overline{\mathbb{R}}$ m.b.

i) $f_n \to f$ μ-fast überall (abgekürzt μ-f.ü.; wenn $\mu(S) = 1$, so sagt man auch „fast sicher“, abgekürzt f.s.), wenn

$$\{x : f_n(x) \not\to f(x)\} = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)} \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} \big\{|f_m - f| > \varepsilon\big\}$$

eine μ-Nullmenge ist.

ii) $f_n \to f$ im Maß μ $:\Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0 :\ \mu\big(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
(man sagt auch „μ-stochastisch“ und schreibt $f_n \to f$ (μ-)stoch.)

iii) $1 \leq p \leq \infty$, $f, f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^p(\mu)$. $f_n \to f$ im p-ten Mittel (auch „in $\mathcal{L}^p(\mu)$“, geschrieben $f_n \overset{\mathcal{L}^p(\mu)}{\longrightarrow} f$) $:\Leftrightarrow \|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Bemerkung 3.23. *i)* $\mu(S) < \infty$, $f_n \to f$ μ-f.ü. $\implies$ $f_n \to f$ im Maß

ii) $f_n \overset{\mathcal{L}^p(\mu)}{\longrightarrow} f$ für ein $p \in [1, \infty]$ $\implies$ $f_n \to f$ im Maß

iii) Die Limiten sind jeweils μ-f.ü. eindeutig bestimmt.

Beweis. *i)* $A_{n,\varepsilon} := \left\{ \sup_{m\geq n} |f_m - f| > \varepsilon \right\} \supset A_{n+1,\varepsilon}$, somit

$$\infty > \mu(A_{n,\varepsilon}) \underset{n\to\infty}{\searrow} \mu\Big(\bigcap_n A_{n,\varepsilon}\Big) = 0 \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0$$

und $\mu\big(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\big) \leq \mu(A_{n,\varepsilon})$.

ii) Sei $1 \leq p < \infty$:

$$\mu\big(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\big) = \mu\big(\{|f_n - f|^p > \varepsilon^p\}\big) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f|^p \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

mit Markov-Ungleichung (Beob. 3.3).

Für $p = \infty$ beachte, dass $\mu\big(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\big) = 0$ für $\varepsilon > \|f_n - f\|_\infty$ gilt.

iii) Es gelte $f_n \to f$ und $f_n \to g$ jeweils im Maß, so ist für $\varepsilon > 0$

$$\mu\big(\{|f - g| > \varepsilon\}\big) \leq \mu\big(\{|f_n - f| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}\big) + \mu\big(\{|f_n - g| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

(Gegen-)Beispiel. Für ein Gegenbeispiel zur Umkehrung seien $X_1, X_2, \ldots$ u.a., $X_n \sim \mathrm{Ber}_{1/n}$, dann gilt

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stoch.}} 0 \qquad \text{(denn für jedes } 1 > \varepsilon > 0 \text{ ist } P\big(|X_n - 0| > \varepsilon\big) = \frac{1}{n} \to 0\text{)},$$

aber

$$P\Big(\underbrace{\{X_n = 1 \ \infty\text{-oft}\}}_{=\limsup_{n\to\infty}\{X_n=1\}}\Big) = 1$$

Lemma 3.24. *$f_1, f_2, \ldots : S \to \overline{\mathbb{R}}$ m.b. mit*

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu\big(\{|f_m - f_n| > \varepsilon\}\big) = 0 \quad \textit{für alle } \varepsilon > 0.$$

Dann gibt es $n_k \underset{k\to\infty}{\nearrow} \infty$, $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ m.b. mit $f_{n_k} \to f$ μ-f.ü. für $k \to \infty$.

Insbesondere: $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ im Maß μ, so gibt es eine Teilfolge mit $f_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g$ μ-f.ü.

Beweis. Wähle $n_1 < n_2 < \cdots$, so dass für $m \geq n_k$ gilt

$$\mu\big(\{|f_m - f_{n_k}| > 2^{-k}\}\big) \leq 2^{-k},$$

insbesondere für $A_k := \left\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}\right\}$ gilt $\mu(A_k) \leq 2^{-k}$ und $\sum_{k=1}^\infty \mu(A_k) < \infty$, mit Borel-Cantelli (Lemma 2.5) also

$$\mu\Big(\limsup_{k\to\infty} A_k\Big) = 0.$$

Auf $\big(\limsup_{k\to\infty} A_k\big)^c$ gilt

$$\sum_{k=1}^\infty |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < \infty,$$

d.h. $f_{n_m} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} \left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right)$ konvergiert μ-f.ü.

Zum Zusatz: Beachte

$$\mu\big(\{|f_m - f_n| > \varepsilon\}\big) \le \mu\big(\{|f_m - g| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}\big) + \mu\big(\{|f_n - g| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}\big) \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Satz 3.25. $1 \le p \le \infty$, $f_1, f_2, \ldots$ *Cauchy-Folge in* $\mathcal{L}^p(\mu)$, *d.h.* $\lim_{m,n\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$.

Dann gibt es ein $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *mit* $f_n \to f$ *in* $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Beweis. Betrachte $1 \le p < \infty$: Nach Bem. 3.23, *ii)* und Lemma 3.24 gibt es $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ m.b. und $n_k \nearrow \infty$ mit $f_{n_k} \to f$ μ-f.ü. Es ist

$$\begin{aligned}\int |f_m - f|^p \, d\mu &\le \liminf_{k\to\infty} \int |f_m - f_{n_k}|^p \, d\mu \\ &\le \sup_{n\ge m} \int |f_m - f_n|^p \, d\mu \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

n. Vor. Insbesondere $f = f_m - (f_m - f) \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $\|f_m - f\|_p \to 0$.

□

Satz 3.26 (Minkowski-Ungleichung[7]). $1 \le p \le \infty$, $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, *so gilt*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis. Fälle $p = 1, p = \infty$ oder falls $\int |f+g|^p \, d\mu = 0$: ✓

Sei $1 < p < \infty$, $0 < \int |f+g|^p \, d\mu$ $(< \infty)$, setze

$$q := \frac{p}{p-1} \; (> 1), \quad \text{somit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p \, d\mu &\le \int |f|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu + \int |g|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu \\ &\le \left(\left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \right) \underbrace{\left(\int |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q}}_{=\left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{(p-1)/p}}\end{aligned}$$

wobei wir für das zweite Ungleichheitszeichen die Hölder-Ungleichung (Satz 3.20) verwenden. □

Beobachtung 3.27. Für $1 \le p \le \infty$ ist $L^p(\mu) = \big\{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\big\}$ mit $[f] = \{g : g = f \ \mu\text{-f.ü.}\}$ ein Banachraum, $L^2(\mu)$ ist mit Skalarprodukt $\langle [f], [g] \rangle := \int fg \, d\mu$ ein Hilbertraum.

Bemerkung 3.28. Sei $\mu(S) < \infty$, $1 \le r < s \le \infty$. Es gilt $\mathcal{L}^s(\mu) \subset \mathcal{L}^r(\mu)$ und die Einbettung $\mathcal{L}^s(\mu) \ni f \mapsto f \in \mathcal{L}^r(\mu)$ ist stetig.

[7] Hermann Minkowski, 1864–1909

Beweis. Fall $s = \infty$: Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, so ist

$$\|f\|_r = \Big(\int |f|^r\, d\mu\Big)^{1/r} \le \Big(\big(\|f\|_\infty\big)^r \mu(S)\Big)^{1/r} = \big(\mu(S)\big)^{1/r}\|f\|_\infty.$$

Fall $s < \infty$: Sei $f \in \mathcal{L}^s(\mu)$, $p := \frac{s}{r}$ (> 1), $q := \frac{1}{1-1/p}$ $(= \frac{s}{s-r})$, so ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und

$$\begin{aligned}\|f\|_r &= \Big(\int 1\cdot |f|^r\, d\mu\Big)^{1/r}\\ &\le \bigg(\Big(\int 1^q\, d\mu\Big)^{1/q}\Big(\int \big(|f|^r\big)^p\, d\mu\Big)^{1/p}\bigg)^{1/r} = \big(\mu(S)\big)^{1-r/s}\|f\|_s.\end{aligned}$$

mit Hölder-Ungleichung (Satz 3.20). $\square$

Literaturverzeichnis

[Kl] A. Klenke, Wahrscheinlichkeitstheorie, 4. Aufl., Springer, 2020.

[Ka] O. Kallenberg, Foundations of modern probability, 3rd ed., Springer, 2021.

[Ge] H.-O. Georgii, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, 5. Aufl., de Gruyter, 2015.

[Du] R. Durrett, Probability : theory and examples, Duxbury Press, 2003.

[Wi] D. Williams, Probability with martingales, Cambridge Univ. Press, 1995.

[KW] G. Kersting, A. Wakolbinger, Stochastische Prozesse, Springer, 2014.

[Fe] W. Feller, An Introduction to Probability Theory, Band 1 und Band 2, Wiley 1968 und 1971.

[Br] L. Breiman: Probability, Wiley, 1968.

[El] J. Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie, 8. Aufl., Springer, 2018.

[Ba] H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, de Gruyter, 1978.