

# Angewandte Stochastik

Dr. Matthias Birkner

---

Vorlesung  
Sommersemester 2008

Felix Hoffmann  
Universität Bonn

---

16. August 2008

## Vorwort

Dieses Werk ist unter einem Creative Commons Namensnennung-NichtKommerziell-Weitergabe unter gleichen Bedingungen-Lizenzvertrag lizenziert. Die vollständige Lizenz ist einzusehen unter:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/de/deed.de>



Dieses Skript wurde von FELIX HOFFMANN während der Vorlesung Angewandte Stochastik von MATTHIAS BIRKNER im Sommersemester 2008 an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität Bonn mitgeschrieben und anschließend von Matthias Birkner durchgesehen und ergänzt.

Bei Fragen, Wünschen, Korrektur- oder Verbesserungsvorschlägen freuen wir uns über jede E-Mail an  
birkner(AT)wias-berlin.de,  
felix.hoffmann(AT)uni-bonn.de

# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Statistik</b>	<b>1</b>
<b>1. Einführung in die Statistik</b>	<b>3</b>
1.0.1. Beispiel: . . . . .	3
1.1. Definition und Sprechweise: statistisches Modell . . . . .	3
1.2. Definition und Sprechweise: parametrisches Modell . . . . .	4
1.2.1. Bemerkung: Uniforme Verteilung auf einer Cantormenge . . . . .	4
1.3. Definition: Produktmodell zu $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$ : . . . . .	4
1.4. Definiton: Statistik . . . . .	4
1.5. Beispiel: „Taxiproblem“, Schätzung des Wertebereichs: . . . . .	4
1.5.1. Bemerkung: . . . . .	5
<b>2. Das Maximum-Likelihood-Prinzip:</b>	<b>7</b>
2.0.2. Beispiel: Qualitätskontrolle . . . . .	7
2.1. Definition: Likelihood-Funktion . . . . .	7
2.1.1. Beispiele: . . . . .	7
2.1.2. Beispiel: Uniforme Verteilung auf $[0, \vartheta]$ . . . . .	8
2.1.3. Beispiel: Normales Modell . . . . .	8
2.2. Sprechweisen: Erwartungstreu, Mittlerer quadratischer Fehler, Bias . . . . .	9
2.3. Satz: Erwartungstreue Schätzer für Varianz und Mittelwert . . . . .	9
2.3.1. Definition und Beobachtung: Konsistenz . . . . .	10
<b>3. Exponentielle Familien, Fisher-Information und beste Schätzer:</b>	<b>11</b>
3.1. Definition: regulär . . . . .	11
3.1.1. Bemerkung: . . . . .	11
3.2. Definition: Fisher-Information . . . . .	11
3.2.1. Bemerkung: . . . . .	11
3.3. Definition: regulärer Schätzer . . . . .	12
3.4. Satz: Cramér-Rao-Schranke . . . . .	12
3.4.1. Beispiele: . . . . .	13
3.5. Definition: Cramér-Rao-effizient . . . . .	13
3.6. Definition: exponentielles Modell . . . . .	13
3.6.1. Bemerkung: . . . . .	14
3.7. Satz über die „Gutartigkeit“ von exponentiellen Modellen . . . . .	14
3.8. Korollar: . . . . .	16
3.8.1. Beispiel: . . . . .	16
3.9. Konsistenz des ML-Schätzers im Produktmodell: . . . . .	16
3.9.1. Bemerkung: . . . . .	17
3.10. Satz und Definition: relative Entropie (Kullback-Leibler-Abstand) . . . . .	17

3.10.1. Beispiele: Poisson- und Exponentialverteilung . . . . .	18
3.11. Satz: . . . . .	18
3.11.1. Bemerkung: Asymptotische Konfidenzintervalle für den ML-Schätzer: . . . . .	19
3.11.2. Beobachtung: . . . . .	19
<b>4. Exkurs: Bedingte Erwartung und Anwendungen</b>	<b>21</b>
4.1. Definition: Bedingte Erwartung . . . . .	21
4.2. Satz: Existenz und Eindeutigkeit der bedingten Erwartung: . . . . .	21
4.3. Eigenschaften der bedingten Erwartung: . . . . .	22
4.3.1. Bemerkung: Zur Existenz der regulären bedingten Verteilung . . . . .	23
4.4. Suffizienz: . . . . .	24
4.5. Satz von Rao-Blackwell . . . . .	24
4.6. Definition: Vollständigkeit . . . . .	24
4.6.1. Beispiel: . . . . .	24
4.6.2. Bemerkung: Eindeutigkeit der Rao-Blackwellisierung . . . . .	24
4.7. Satz von Lehmann-Scheffé . . . . .	25
4.7.1. Bemerkung: . . . . .	25
<b>5. Bayes-Schätzer</b>	<b>27</b>
5.1. Definition: A-priori-Dichte und -Maß . . . . .	27
5.2. Satz: . . . . .	28
<b>6. Konfidenzintervalle:</b>	<b>29</b>
6.1. Definition: Konfidenzbereich zum Irrtumsniveau $\alpha$ . . . . .	29
6.1.1. Beispiel: Konfidenzintervalle im Binomialmodell . . . . .	29
6.2. Definition: Quantil, Fraktile und Median . . . . .	30
6.2.1. Lemma: . . . . .	30
6.2.2. Satz: exaktes Konfidenzintervall im Binomialmodell . . . . .	32
6.3. Konfidenzintervalle im Gauß'schen Modell . . . . .	32
6.3.1. Satz: . . . . .	33
<b>7. Exkurs: mehrdimensionale Normalverteilung</b>	<b>35</b>
7.1. Dichtentransformationssatz: . . . . .	35
7.2. Erinnerung: $\Gamma_{a,b}$ -Verteilung . . . . .	35
7.2.1. Proposition: . . . . .	35
7.2.2. Korollar: . . . . .	36
7.2.3. Proposition: Fisher-Verteilung mit $m$ und $n$ Freiheitsgraden . . . . .	36
7.2.4. Korollar: Student'sches T . . . . .	37
7.3. Satz: . . . . .	37
<b>8. Konfidenzintervalle für den Median</b>	<b>39</b>
8.1. Satz über die Konfidenzintervalle für den Median . . . . .	39
8.2. Korollar: Vorzeichentest für den Median . . . . .	40
8.3. Die 2-Stichproben-Situation: . . . . .	40
8.3.1. Wilcoxon-Rangsummen-Test . . . . .	40
8.3.2. Proposition: . . . . .	40
8.4. Satz: . . . . .	42
8.5. Definition: stochastisch kleiner . . . . .	43

8.5.1. Satz: . . . . .	44
8.5.2. Beispiel: Verkehrstote in Großbritannien 1969–1984 . . . . .	45
<b>9. Testen von Hypothesen:</b>	<b>47</b>
9.1. Definition: Test, Randomisierung und Gütefunktion . . . . .	47
9.2. Definition: gleichmäßig bester Test . . . . .	47
9.3. Alternativtest und das Neyman-Pearson-Lemma . . . . .	47
9.3.1. Definition: Neyman-Pearson-Test . . . . .	48
9.3.2. Satz: (Neyman-Pearson-Lemma) . . . . .	48
9.4. Satz: (Lemma von Stein) . . . . .	49
9.4.1. Beispiel: . . . . .	51
<b>10. Monotone Likelihood-Quotienten und beste einseitige Tests</b>	<b>53</b>
10.1. Definition: Likelihood-Quotient $R_{\vartheta', \vartheta}(x)$ . . . . .	53
10.1.1. Beobachtung: . . . . .	53
10.2. Satz: . . . . .	53
10.2.1. Beispiel: . . . . .	54
10.3. Tests im (2-parametrischen) Gauß'schen Modell . . . . .	54
10.3.1. Satz: Linksseitiger $\chi^2$ -Test für die Varianz im Gauß'schen Modell . . . . .	55
10.3.2. Bemerkung: (Der rechtsseitige $\chi^2$ -Test für die Varianz) . . . . .	56
10.3.3. Satz: Einseitiger Student'scher T-Test . . . . .	56
<b>11. <math>\chi^2</math>-Anpassungstest</b>	<b>59</b>
11.1. Test auf eine vorgegebene Häufigkeitsverteilung . . . . .	59
11.1.1. Satz: . . . . .	60
11.1.2. Korollar: . . . . .	62
11.1.3. $\chi^2$ -Anpassungstest . . . . .	62
11.2. $\chi^2$ -Test auf Unabhängigkeit: . . . . .	62
11.2.1. Satz: . . . . .	62
11.2.2. Korollar: $\chi^2$ -Test auf Unabhängigkeit . . . . .	64
<b>12. Regression und das lineare Modell</b>	<b>67</b>
12.1. „Einfache“ Regression: . . . . .	67
12.1.1. Satz: . . . . .	68
12.2. Das lineare Modell: . . . . .	69
12.2.1. Satz von Gauß-Markov . . . . .	70
12.3. Das normale lineare Modell: . . . . .	71
12.3.1. Verallgemeinerung des Satzes von Student . . . . .	72
12.3.2. Korollar: Konfidenzbereiche im normalverteilten linearen Modell . . . . .	73
12.3.3. Korollar: Tests im normalverteilten linearen Modell . . . . .	74
12.3.4. Beispiel: Polynomielle Regression . . . . .	75
12.4. Varianzanalyse: . . . . .	76
12.4.1. Satz: Konfidenzbereich für $\gamma = (m_1, \dots, m_s)^t$ . . . . .	77
12.4.2. Satz: F-Test auf Gleichheit der Gruppenmittelwerte . . . . .	78
12.4.3. Korollar: $t$ -Test auf Gleichheit der Mittelwerte für zwei ungepaarte (normalverteilte) Stichproben . . . . .	78
12.5. Zweifaktorielle Varianzanalyse . . . . .	79
12.5.1. Beispiel: . . . . .	79

<b>II. Finanzmathematik - Mathematische Modelle und Methoden zur Bewertung von Derivaten</b>	<b>81</b>
<b>13. Einführung in die Finanzmathematik</b>	<b>83</b>
13.1. Europäische Call- und Put-Option . . . . .	83
13.2. Binomialmodell: . . . . .	84
13.2.1. Mehrperioden-Binomialmodell (CRR(=Cox-Ross-Rubinstein)-Modell (1979))	85
13.2.2. Beobachtung: . . . . .	85
13.2.3. Satz: . . . . .	86
13.2.4. Beispiel: Europäische Call-Option . . . . .	88
13.2.5. Bemerkung: Call-Put-Parität . . . . .	88
13.3. Black-Scholes-Formel . . . . .	88
13.3.1. Satz: . . . . .	89
13.3.2. Korollar: Black-Scholes-Formel für den Preis eines Calls . . . . .	90
13.4. Fundamentalsatz der Preistheorie (in endlichen Märkten) . . . . .	90
13.4.1. Marktmodell . . . . .	90
13.4.2. Definition: selbstfinanzierend . . . . .	91
13.4.3. Definition: (duplizierbarer) Claim, Hedge, vollständiges Marktmodell, Arbitrage	91
13.4.4. Korollar: . . . . .	92
13.4.5. Definition: Äquivalentes Martingalmaß . . . . .	92
13.4.6. Beobachtung: . . . . .	92
13.4.7. Fundamentalsatz der Preistheorie: . . . . .	92
<b>14. Exkurs: Stochastische Integration</b>	<b>95</b>
14.0.8. Definition: Stochastischer Prozess . . . . .	95
14.0.9. Bemerkung: . . . . .	95
14.0.10. Lemma: . . . . .	96
14.1. Definition: Stochastischer Integrator, Itô-Integral . . . . .	97
14.1.1. Lemma: . . . . .	97
14.1.2. Definition: Fast sicher endliche Variation . . . . .	97
14.1.3. Bemerkung: . . . . .	98
14.1.4. Satz: . . . . .	99
14.2. Satz: . . . . .	101
14.2.1. Erinnerung: Satz vom optionalen Stoppen . . . . .	101
14.2.2. Erinnerung: Doobs $\mathcal{L}^2$ -Ungleichung: . . . . .	101
14.3. Itô-Formel . . . . .	103
14.3.1. Satz: . . . . .	103
<b>15. Die geometrische Brown'sche Bewegung und die Black-Scholes-Formel</b>	<b>105</b>
<b>III. Anhang</b>	<b>109</b>
<b>A. Verwendeter R-Code</b>	<b>111</b>
A.1. Konfidenzintervalle im Binomialmodell: Für Abbildung 6.3 verwendeter R-Code . . .	111
A.2. Temperaturdiagramm . . . . .	112

**Teil I.**  
**Statistik**





# 1. Einführung in die Statistik

## 1.0.1. Beispiel:

$n$  u.a. Messungen (z.B. Gewicht eines Goldbarrens), aus denen Rückschlüsse auf den „wahren“ Wert gezogen werden sollen.

**Annahme:** die Ergebnisse  $X_1, \dots, X_n$  seien normalverteilt  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  mit bekannter Varianz  $\sigma^2$  und unbekanntem Mittelwert  $m$  (d.h.  $X_i$  haben Dichte  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ ).  
Wir beobachten  $x_1, \dots, x_n$ .

**Punktschätzer:**

$$M(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

**Konfidenzintervall:**  $\mathbf{P}_{(m, \sigma^2)} [\{[M(X) - \varepsilon(X), M(X) + \varepsilon(X)] \ni m\}] \geq 1 - \alpha \quad \forall m \in \mathbb{R}$

**Beobachtung:**  $M(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{!}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma Z_i + m) = m + \frac{\sigma}{n} (Z_1 + \dots + Z_n) \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$

$$\forall m : \mathbf{P}_{(m, \sigma^2)} \left[ \underbrace{\left\{ \left| \frac{M(X) - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \right| \leq a \right\}}_{=\{M(X) - \frac{\sigma}{n}a \leq m \leq M(X) + \frac{\sigma}{n}a\}} \right] = 2\Phi(a) - 1$$

**Testen von Hypothesen:** z.B.: Sprechen die Beobachtungen für  $m \leq m_0$ ?

Regel: Ist  $M(X) \leq c$  entscheide für Nullhypothese „ $m \leq m_0$ “

Ist jedoch  $M(X) > c$  entscheide für Alternative „ $m > m_0$ “

Verlange:  $\mathbf{P}_{(m, \sigma^2)} [M(X) > c] \leq \alpha \quad \forall m \leq m_0$  (Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art klein)

und  $\mathbf{P}_{(m, \sigma^2)} [M(X) > c] \stackrel{!}{=} \text{möglichst groß} \quad \forall m > m_0$  (Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art klein)

Vorschlag:  $c$  so, dass  $\mathbf{P}_{(m, \sigma^2)} [M(X) > c] = \mathbf{P}[Z > \frac{c-m_0}{\sigma}] = \alpha$

## 1.1. Definition und Sprechweise: statistisches Modell

Ein *statistisches Modell* ist ein Tripel  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$ , wo  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum (d.h.  $\mathcal{F} \subset \mathbf{P}(\mathcal{X})$  ist eine  $\sigma$ -Algebra) und  $\mathbf{P}_\vartheta$  auf  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  für  $\vartheta \in \Theta$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, wobei die Indexmenge  $\Theta$  nicht einpunktig ist.

## 1.2. Definition und Sprechweise: parametrisches Modell

Das Modell heißt *parametrisch*, wenn  $\subseteq \mathbb{R}^d$  und *einparametrisch*, wenn  $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ , *diskret*, wenn  $\mathcal{X}$  abzählbar, *stetig*, wenn  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^k$  (messbar) und jedes  $\mathbf{P}_\vartheta$  eine Dichte  $f_\vartheta$  bzgl. des Lebesgue-Maß besitzt.

Ein Modell heißt *Standardmodell*, falls es diskret oder stetig ist.

### 1.2.1. Bemerkung: Uniforme Verteilung auf einer Cantormenge

Wähle  $(X_n)_n$  i.i.d.  $\sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$ ,  $S = \sum_{n=1}^{\infty} 2X_n \cdot 3^{-n}$ , die Verteilung von  $S$  ist weder diskret noch besitzt sie eine Dichte bzgl. des Lebesgue-Maßes.

## 1.3. Definition: Produktmodell zu $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$ :

Ein Produktmodell ist ein statistisches Modell der Form  $(\mathcal{X}^n, \mathcal{F}^n, \mathbf{P}_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta \in \Theta)$ .

## 1.4. Definiton: Statistik

- (i) Eine Zufallsgröße von  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  nach  $(\Sigma, \mathcal{S})$  heißt eine *Statistik*.
- (ii)  $\tau : \Theta \rightarrow \Sigma, \tau(\vartheta)$  ist eine Kenngröße oder ein „Parametermerkmal“,  $T : \mathcal{X} \rightarrow \Sigma$  (messbar) heißt ein Schätzer (für  $\tau$ ).

## 1.5. Beispiel: „Taxiproblem“, Schätzung des Wertebereichs:

Angenommen alle Taxis einer Stadt sind mit den Nummern  $1, \dots, N$  durchnummeriert und man beobachtet die Nummern  $x_1, \dots, x_n$  mit  $n \ll N$  und den  $x_i$  paarweise verschieden. Was wäre dann ein guter Schätzer für  $N$ ?

**Wir modellieren kontinuierlich:** Unter  $\mathbf{P}_\vartheta$  sind  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig, uniform verteilt auf  $[0, \vartheta]$ . Wir betrachten folgende Schätzer für  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} T_n(x) &:= 2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \\ \widetilde{T}_n(x) &:= \max\{X_1, \dots, X_n\}, \\ T'_n(x) &:= \widetilde{T}_n(x) + \min\{x_1, \dots, x_n\}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\vartheta[T_n] &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_\vartheta[X_i] = \vartheta, \\ \mathbf{E}_\vartheta[\widetilde{T}_n] &= \int_0^\vartheta t \cdot \frac{nt^{n-1}}{\vartheta^n} \mathbf{1}_{[0, \vartheta]}(t) dt \\ &= \frac{n}{n+1} \vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\vartheta[T'_n] &= \mathbf{E}_\vartheta[\widetilde{T}_n] + \underbrace{\mathbf{E}_\vartheta[\min\{X_1, \dots, X_n\}]}_{\substack{= \mathbf{E}_\vartheta[\min\{\vartheta - X_1, \dots, \vartheta - X_n\}] \\ \vartheta + \min\{-X_1, \dots, -X_n\} = \vartheta + \max\{X_1, \dots, X_n\}}} \\
&= \frac{n}{n+1}\vartheta + \vartheta - \frac{n}{n+1}\vartheta = \vartheta.
\end{aligned}$$

Und die Varianz?

$$\begin{aligned}
\text{Var}_\vartheta(T_n) &= \frac{4}{n^2} n \underbrace{\text{Var}_\vartheta(X_i)}_{=\frac{\vartheta^2}{12}} \\
&= \frac{\vartheta^2}{3n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}_\vartheta(\widetilde{T}_n) &= \mathbf{E}[\widetilde{T}_n^2] - \mathbf{E}_\vartheta[\widetilde{T}_n]^2 \\
&= \int_0^\vartheta t^2 \cdot \frac{nt^{n-1}}{\vartheta^n} dt - \left( \int_0^\vartheta t \cdot \frac{nt^{n-1}}{\vartheta^n} dt \right)^2 \\
&= \frac{\vartheta^2 n}{n+2} - \frac{\vartheta^2 n^2}{(n+1)^2} \\
&= \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \vartheta^2.
\end{aligned}$$

### 1.5.1. Bemerkung:

$T^* := \frac{n+1}{n} \widetilde{T}_n$  hat

$$\mathbf{E}_\vartheta T_n^* = \vartheta$$

mit

$$\text{Var}_\vartheta(T_n^*) = \frac{\vartheta^2}{n(n+2)}$$

Übungsaufgabe: Varianz von  $T'_n$  berechnen.

Wir hätten gerne, dass

$$\mathbf{E}_\vartheta[(T - \vartheta)^2] \stackrel{!}{=} \text{klein, glm für alle } \vartheta,$$

d.h. der erwartete quadratische Fehler sollte möglichst (gleichmäßig) klein sein.

---

<sup>1</sup> $\mathbf{P}_\vartheta[\widetilde{T}_n \leq c] = \left(\frac{c}{\vartheta}\right)^n$ , d.h.  $\widetilde{T}_n$  hat die Dichte  $\frac{nt^{n-1}}{\vartheta^n} \mathbb{1}_{[0, \vartheta]}(t)$



## 2. Das Maximum-Likelihood-Prinzip:

### 2.0.2. Beispiel: Qualitätskontrolle

Es sind  $N$  Orangen angeliefert worden, darunter  $\vartheta$  viele faul. Wir nehmen eine Stichprobe von  $n$  Orangen, von denen  $x$  faul sind.

$$\Theta = \{0, 1, \dots, N\}, \quad \rho_{\vartheta}(x) = \frac{\binom{\vartheta}{x} \binom{N-\vartheta}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

für welche(s)  $\vartheta$  ist  $\rho_{\vartheta}(x)$  maximal?

Betrachte:

$$\frac{\rho_{\vartheta}(x)}{\rho_{\vartheta-1}(x)} = \frac{\frac{\binom{\vartheta}{x} \binom{N-\vartheta}{n-x}}{\binom{N}{n}}}{\frac{\binom{\vartheta-1}{x} \binom{N-\vartheta+1}{n-x}}{\binom{N}{n}}} = \frac{\vartheta}{\vartheta-x} \frac{(N-\vartheta+1-n+x)}{(N-\vartheta+1)} \geq 1 \iff \vartheta n \leq (N+1)x,$$

demnach ist  $T(x) = \lfloor \frac{x}{n}(N+1) \rfloor$  (ein) Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\vartheta$ . (Der Maximum-Likelihood-Schätzer ist hier eindeutig, es sei denn  $\frac{x}{n}(N+1) \in \mathbb{N}$ , dann sind  $\frac{x}{n}(N+1)$  und  $\frac{x}{n}(N+1) - 1$  beides ML-Schätzer.)

### 2.1. Definition: Likelihood-Funktion

Sei  $\mathcal{M} = (\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P}_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta)$  ein statistisches Standardmodell. Die Funktion

$$\rho : \mathcal{X} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

wobei  $x \mapsto \rho(x, \vartheta)$  die Dichte von  $\mathbf{P}_{\vartheta}$  bezüglich des Referenzmaßes ist, heißt *Likelihood-Funktion*. Wir schreiben auch  $\rho(x, \vartheta) = \rho_{\vartheta}(x) = \rho_x(\vartheta)$ . Ein Schätzer  $T : \mathcal{X} \rightarrow \Theta$  heißt (ein) Maximum-Likelihood-Schätzer (MLE<sup>1</sup>), wenn

$$\rho(x, T(x)) = \max_{\vartheta \in \Theta} \rho(x, \vartheta) \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

#### 2.1.1. Beispiele:

Erfolgswahrscheinlichkeit beim Münzwurf (Schätzen des Erfolgsparameters einer Binomialverteilung): Wir werfen eine Münze  $n$  mal und zählen die Anzahl Erfolge. Statistisches Modell:

$$(\{0, \dots, n\}, \mathbf{P}(\{0, \dots, n\}), \text{Bin}(n, \vartheta : \vartheta \in [0, 1])).$$

Beobachte  $x$  Erfolge:

$$\rho_x(\vartheta) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x} \text{ ist maximal} \iff$$

---

<sup>1</sup>MLE="maximum likelihood estimator", wird häufig mit  $\hat{\vartheta}_{ML}$  bezeichnet

$$\frac{d}{d\vartheta} \log \rho_x(\vartheta) \cdot \frac{d}{d\vartheta} (\log \binom{n}{x}) + x \log \vartheta + (n-x) \log(1-\vartheta) = \frac{x}{\vartheta} - \frac{n-x}{1-\vartheta} \stackrel{!}{=} 0$$

$\iff \vartheta = \frac{x}{n}$ , also ist  $T(x) = \frac{x}{n}$  der ML-Schätzer für  $\vartheta$

### 2.1.2. Beispiel: Uniforme Verteilung auf $[0, \vartheta]$

$x_1, \dots, X_n$  unter  $\mathbf{P}_\vartheta$  i.i.d.,  $\sim \text{unif}([0, \vartheta])$ .

$$\rho(x, \vartheta) = \frac{1}{\vartheta} \mathbb{1}_{[0, \vartheta]}(x), \rho^{\otimes n}((x_1, \dots, x_n), \vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta^n} & \text{falls } x_1, \dots, x_n \in \vartheta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist  $\max\{X_1, \dots, X_n\}$  der Maximum-Likelihood-Schätzer.

### 2.1.3. Beispiel: Normales Modell

Sei  $\vartheta := (m, v) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ .  $\mathbf{P}_\vartheta = \mathcal{N}_{(m, v)}$

$$\rho(x, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}},$$

$n$  Beobachtungen:  $(\mathbf{Q}_\vartheta = \mathbf{P}_\vartheta^{\otimes n})$ ,

$$\rho^{\otimes n}((x_1, \dots, x_n), \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m)^2}{2v}\right)$$

Gesucht: ML-Schätzer für  $\vartheta = (m, v)$ , basierend auf den Beobachtungen  $X_1, \dots, X_n$ :

$$\log \rho^{\otimes n}((X_1, \dots, X_n), \vartheta) = -\frac{n}{2} \log 2\pi v - \frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$$

#### Beobachtung: Steiner'scher Verschiebungssatz (siehe auch Abbildung 2.1)

Sei  $M(\mathbf{x}) = M(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  der empirische Mittelwert der  $x_i$ . Es gilt für jedes  $m \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M(\mathbf{x}))^2 + (M(\mathbf{x}) - m)^2,$$

denn die rechte Seite ist gleich

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2M(\mathbf{x}) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j + M(\mathbf{x})^2 + (M(\mathbf{x})^2 - 2M(\mathbf{x})m + m^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2M(\mathbf{x})m + m^2.$$

Zur Wahl von  $v$ :

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dv} \left( -\frac{n}{2} \log(2\pi v) \right) - \frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (X_i - M(\mathbf{X}))^2 = \frac{n}{2v} - \frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^n (X_i - M(\mathbf{X}))^2 \iff v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M(\mathbf{X}))^2,$$

d.h. empirischer Mittelwert und empirische Varianz sind die ML-Schätzer im normalen Produktmodell.

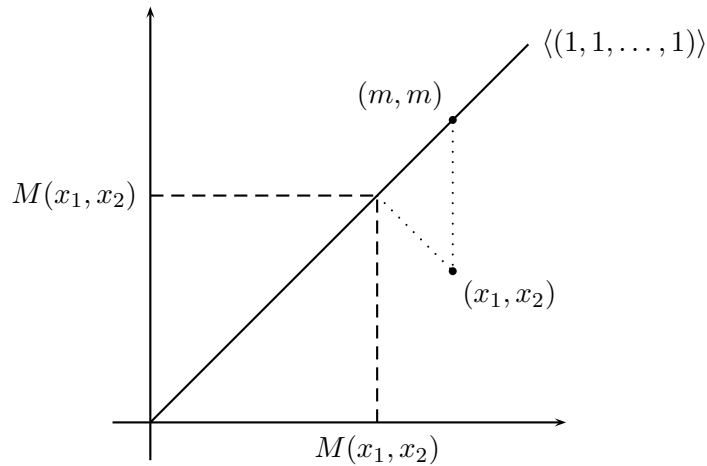


Abbildung 2.1.: Unter allen Punkten auf der Diagonalen  $\langle(1, 1, \dots, 1)\rangle$  hat  $(M(\mathbf{x}), M(\mathbf{x}), \dots, M(\mathbf{x}))$  den kleinsten euklidischen Abstand von  $(x_1, \dots, x_n)$ .

## 2.2. Sprechweisen: Erwartungstreue, Mittlerer quadratischer Fehler, Bias

Sei  $T$  ein Schätzer für ein reelles Parametermerkmal  $\tau(\vartheta)$ .  $T$  heißt *erwartungstreu*, wenn  $\mathbf{E}_\vartheta[T] = \tau(\vartheta)$ ,  $B_\vartheta(T) = \mathbf{E}_\vartheta[T] - \tau(\vartheta)$  heißt *Bias* (Verzerrung).

*Mittlerer quadratischer Fehler*:  $F_\vartheta(T) = \mathbf{E}_\vartheta[(T - \tau(\vartheta))^2] = \text{Var}_\vartheta(T) + B_\vartheta(T)^2$ .

## 2.3. Satz: Erwartungstreue Schätzer für Varianz und Mittelwert

Betrachte ein Produktmodell  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^{\otimes n}(\mathbb{R}), \mathbf{Q}_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta \in \Theta)$  (d.h. seien  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. gem  $\mathbf{Q}_\vartheta, \vartheta \in \Theta$ ), wo  $\mathbf{Q}_\vartheta$  Mittelwert  $m(\vartheta) = \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{Q}_\vartheta(dx)$  und Varianz  $v(\vartheta) = \int_{\mathbb{R}} (x - m(\vartheta))^2 \mathbf{Q}_\vartheta(dx)$  hat.

$M := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  ist ein erwartungstreuer Schätzer für  $m(\vartheta)$  und  $V^* := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$  ist ein erwartungstreuer Schätzer für  $v(\vartheta)$ .

**Beweis:**

$\mathbf{E}_\vartheta[M] = m(\vartheta)$  (Linearität für den Erwartungswert),

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M)^2, \\ \mathbf{E}_\vartheta[V] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_\vartheta[(X_i - M)^2] \\ &= \text{Var}_\vartheta(X_1 - M) = \text{Var}_\vartheta\left(\frac{n-1}{n}X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i\right) \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{n-1}{n^2} \text{Var}_\vartheta(X_1) \\ &= \frac{n-1}{n} v(\vartheta). \end{aligned}$$

□

### 2.3.1. Definition und Beobachtung: Konsistenz

Man nennt eine Folge von Schätzern  $T_n$  für  $\tau(\vartheta)$  konsistent, wenn

$$\mathbf{P}_\vartheta[|T_n - \tau(\vartheta)| > \varepsilon] \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \vartheta.$$

Sei  $\mathbf{P}_\vartheta = \mathbf{Q}_\vartheta^{\otimes n}$ ,  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $V_n^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ . Es gilt mit dem Schwachen GGZ:

$$\mathbf{P}_\vartheta[|M_n - m(\vartheta)| > \varepsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \vartheta$$

und

$$\mathbf{P}_\vartheta[|V_n^* - v(\vartheta)| > \varepsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \vartheta$$

(Übung, benutze schwGGZ), d.h. im Produktmodell ist  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konsistent für  $m(\vartheta)$ ,  $(V_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$  (und ebenso  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) konsistent für  $v(\vartheta)$ .



### 3. Exponentielle Familien, Fisher-Information und beste Schätzer:

Ein erwartungstreuer Schätzer  $T$  für ein reelles Parametermerkmal  $\tau(\vartheta)$  heißt *varianzminimierend* („gleichmäßig bester Schätzer“, UMVU<sup>1</sup>-estimator), falls

$$\text{Var}_{\vartheta}(T) \leq \text{Var}_{\vartheta}(S) \quad \forall \vartheta \in \Theta, \forall \text{ anderen erwartungstreuen Schätzer } S.$$

#### 3.1. Definition: regulär

Ein einparametrisches Standardmodell heißt *regulär*, falls

- (i)  $\Theta \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall,
- (ii)  $\rho(x, \vartheta)$  ist strikt positiv auf  $\mathcal{X} \times \Theta$ , für jedes  $x$  ist  $\vartheta \mapsto \rho(x, \vartheta)$  stetig diffbar,
- (iii)  $U_{\vartheta}(x) := \frac{d}{d\vartheta} \log \rho(x, \vartheta) \left( = \frac{\frac{d\rho(x, \vartheta)}{d\vartheta}}{\rho(x, \vartheta)} \right)$  erfüllt  $\text{Var}_{\vartheta}(U_{\vartheta}) \in (0, \infty)$  ( $U_{\vartheta}$  heißt die *Scorefunktion*)

und es gilt  $\int_{\mathcal{X}} \frac{d}{d\vartheta} \rho(x, \vartheta) dx = \frac{d}{d\vartheta} \int_{\mathcal{X}} \rho(x, \vartheta) dx (= 0)$ .

##### 3.1.1. Bemerkung:

$$\mathbf{E}_{\vartheta}[U_{\vartheta}] = \int_{\mathcal{X}} \frac{d}{dx} \rho(x, \vartheta) dx = \frac{d}{d\vartheta} \int_{\mathcal{X}} \rho(x, \vartheta) dx = 0$$

#### 3.2. Definition: Fisher-Information

$I(\vartheta) := \text{Var}_{\vartheta}(U_{\vartheta})$  heißt *Fisher-Information*.

##### 3.2.1. Bemerkung:

- (i) Wenn  $I(\vartheta) \equiv 0$  auf einem Teilintervall  $\Theta_1 \subset \Theta$ , so ist  $\rho(x, \vartheta) = \rho(x, \vartheta')$  für  $\vartheta, \vartheta' \in \Theta_1$ .
- (ii)  $\mathcal{M}$  ein reguläres Standardmodell mit Fisher-Information  $I(\vartheta)$ , dann ist das  $n$ -fache Produktmodell ebenfalls ein reguläres Standardmodell mit Fisher-Information  $I^{\otimes n}(\vartheta) = n \cdot I(\vartheta)$ .

(Denn  $\rho^{\otimes n}((x_1, \dots, x_n), \vartheta) = \prod_{i=1}^n \rho(x_i, \vartheta)$ ,

$$U_{\vartheta}^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\vartheta} \log \rho(x_i, \vartheta),$$

$$\text{Var}_{\vartheta}(U_{\vartheta}^{\otimes n}) = \sum_{i=1}^n \text{Var}_{\vartheta}(U_{\vartheta}(X_i)) = n \cdot I(\vartheta).$$

---

<sup>1</sup>UMVU = uniformly minimum variance unbiased

### 3.3. Definition: regulärer Schätzer

Ein Schätzer  $T$  heißt *regulär*, wenn für alle  $\vartheta \in \Theta$  gilt:  $\frac{d}{d\vartheta} \int T(x)\rho(x, \vartheta)dx = \int T(x)\frac{d}{d\vartheta}\rho(x, \vartheta)dx$ .

$$\underbrace{\int T(x)\rho(x, \vartheta)dx}_{= \mathbf{E}_\vartheta[T]}$$

### 3.4. Satz: Cramér-Rao-Schranke

Sei  $\mathcal{M}$  ein reguläres Standardmodell,  $\tau : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetig differenzierbares Parametermerkmal,  $T$  ein regulärer, erwartungstreuer Schätzer für  $\tau$  (d.h.  $\mathbf{E}_\vartheta[T] = \tau(\vartheta)$ ).

Dann gilt (Cramér-Rao-Schranke):

$$\text{Var}_\vartheta(T) \geq \frac{(\tau'(\vartheta))^2}{I(\vartheta)} \quad \forall \vartheta \in \Theta. \quad (*)$$

Gleichheit gilt für alle  $\vartheta$  genau dann, wenn

$$T(x) - \tau(\vartheta) = \frac{\tau'(\vartheta)U_\vartheta(x)}{I(\vartheta)},$$

d.h. wenn die Likelihood-Funktion die Form  $\rho(x, \vartheta) = h(x) \exp(a(\vartheta)T(x) - b(\vartheta))$  hat. Hierbei ist  $a : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{\tau'}$ ,  $h : \mathcal{X} \rightarrow (0, \infty)$  meßbar,  $b(\vartheta) = \log \int e^{a(\vartheta)T(x)} h(x) dx$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \text{Cov}_\vartheta(T, U_\vartheta) &= \mathbf{E}_\vartheta[T \cdot U_\vartheta] - \mathbf{E}_\vartheta[T] \cdot \underbrace{\mathbf{E}_\vartheta[U_\vartheta]}_{=0} \\ &= \int T(x) \frac{d}{d\vartheta} \log \rho(x, \vartheta) \cdot \rho(x, \vartheta) dx \\ &= \int T(x) \frac{d}{d\vartheta} \rho(x, \vartheta) dx \\ &= \frac{d}{d\vartheta} \int T(x) \rho(x, \vartheta) dx \\ &= \frac{d}{d\vartheta} \mathbf{E}_\vartheta[T] \\ &= \tau'(\vartheta) \end{aligned}$$

Sei  $c(\vartheta) = \frac{\tau'(\vartheta)}{I(\vartheta)}$ . Es gilt

$$(**) \quad 0 \leq \text{Var}_\vartheta(T - c(\vartheta)U_\vartheta) = \text{Var}_\vartheta(T) + \underbrace{c(\vartheta)^2 \cdot \text{Var}_\vartheta(U_\vartheta)}_{= \frac{\tau'(\vartheta)^2}{I(\vartheta)}} - 2 \underbrace{c(\vartheta) \cdot \text{Cov}_\vartheta(T, U_\vartheta)}_{= \frac{\tau'(\vartheta)^2}{I(\vartheta)}} = \text{Var}_\vartheta(T) - \frac{(\tau'(\vartheta))^2}{I(\vartheta)},$$

was die Ungleichung in (\*) beweist. Für Gleichheit in (\*\*), und damit in (\*), (für ein  $\vartheta$ ) muss  $T - c(\vartheta)U_\vartheta$   $\mathbf{P}_\vartheta$ -f.s. konstant (und somit gleich seinem Erwartungswert  $\tau(\vartheta)$ ) sein, d.h.

$$\{x : T(x) - c(\vartheta)U_\vartheta(x) \neq \tau(\vartheta)\} \text{ hat Maß } 0 \text{ unter } \mathbf{P}_\vartheta,$$

da  $c(\vartheta), U_\vartheta, \tau(\vartheta)$  als Funktion von  $\vartheta$  stetig sind:

$$\mu(\{x : T(x) - c(\vartheta)U_\vartheta(x) \neq \tau(\vartheta) \text{ für ein } \vartheta \in \Theta\}) = 0$$

Also: Gleichheit in (\*\*)  
 $\iff$

$$\frac{d}{d\vartheta} \log \rho(x, \vartheta) = U_\vartheta(x) = \frac{T(x) - \tau(\vartheta)}{c(\vartheta)},$$

$$\log \rho(x, \vartheta) = \log \rho(x, \vartheta_0) + T(x) \cdot \underbrace{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} -\frac{I(\sigma)}{\tau'(\sigma)} d\sigma}_{=a(\vartheta)-a(\vartheta_0)} - \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{I(\sigma)}{\tau'(\sigma)} \cdot \tau(\sigma) d\sigma$$

□

### 3.4.1. Beispiele:

(i) Binomialverteilung:  $\mathbf{P}_\vartheta = \text{Bin}_{n,\vartheta}, \vartheta \in (0, 1)$ . Dann ist

$$\rho(x, \vartheta) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1 - \vartheta)^{n-x} = \binom{n}{x} \exp \left( \underbrace{\frac{x}{n}}_{T(x)} \underbrace{n \log\left(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right)}_{=a(\vartheta)} + \underbrace{n \log(1-\vartheta)}_{=b(\vartheta)} \right)$$

(ii) Poissonverteilung:  $\mathbf{P}_\vartheta = \text{Pois}(\vartheta), \vartheta \in (0, \infty)$ :

$$p(x, \vartheta) = e^{-\vartheta} \frac{\vartheta^x}{x!} = \underbrace{\frac{1}{x!}}_{=h(x)} e^{\underbrace{\frac{T(x)}{x}}_{=a(\vartheta)} \underbrace{\log \vartheta}_{=b(\vartheta)} - \vartheta}$$

## 3.5. Definition: Cramér-Rao-effizient

Ein Schätzer, der die Gleichheit in der Cramér-Rao-Ungleichung (Schranke) realisiert, heißt *Cramér-Rao-effizient*.

## 3.6. Definition: exponentielles Modell

Ein einparametriges statistisches Standardmodell  $\mathcal{M} = (\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$  (mit  $\Theta \subseteq \mathbb{R}$  offenes Intervall) heißt *exponentielles Modell* bzgl. der Statistik  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn die Likelihood-Funktion von der Form

$$\rho(x, \vartheta) = h(x) \cdot \exp(a(\vartheta) \cdot T(x) - b(\vartheta))$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $a : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a' \neq 0$  und  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar.<sup>2</sup>

$(\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$  heißt „*exponentielle Familie*“.

(Wir nehmen an, dass  $T$  nicht fast überall konstant ist.)

<sup>2</sup>Wobei  $b(\vartheta) = \log \int h(x) e^{a(\vartheta)T(x)} dx$  die Normierungsfunktion ist.

### 3.6.1. Bemerkung:

Das Produktmodell  $\mathcal{M}^{\otimes n}$  eines exponentiellen Modells  $\mathcal{M}$  bzgl. der Statistik  $T$  ist ebenfalls ein exponentielles Modell, und die zugrundeliegende Statistik ist

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(x_i),$$

denn

$$\rho^{\otimes n}((x_1, \dots, x_n), \vartheta) = \prod_{i=1}^n \rho(x_i, \vartheta) = \prod_{i=1}^n h(x_i) \exp \left( na(\vartheta) \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (T(x_i)) - nb(\vartheta) \right).$$

## 3.7. Satz über die „Gutartigkeit“ von exponentiellen Modellen

Sei  $\mathcal{M}$  ein exponentielles Modell, dann gilt:

- (i)  $b$  ist stetig differenzierbar auf  $\vartheta$  mit  $b'(\vartheta) = a'(\vartheta) \mathbf{E}_{\vartheta}[T]$ .
- (ii) Jede Statistik  $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Erwartungswert für jedes  $\vartheta \in \Theta$  existiert, ist regulär. Insbesondere sind  $\mathcal{M}$  und  $T$  regulär und  $\tau(\vartheta) := \mathbf{E}_{\vartheta}[T]$  ist stetig differenzierbar mit  $\tau'(\vartheta) = a'(\vartheta) \cdot \text{Var}_{\vartheta}(T) > 0$ .
- (iii)  $I(\vartheta) = a'(\vartheta) \tau'(\vartheta)$

### Beweis:

Wir nehmen o.E. an, dass  $a(\vartheta) = \vartheta$ , ansonsten parametrisieren wir um und verwenden die Kettenregel.

- (i) Sei  $S$  eine Statistik, deren Erwartungswert  $\mathbf{E}_{\vartheta}[S] = \int_{\mathcal{X}} S(x) h(x) e^{a(\vartheta)T(x) - b(\vartheta)} dx$  für jedes  $\vartheta$  existiert (und endlich ist).  
Es sei weiter  $u_S(\vartheta) := e^{b(\vartheta)} \mathbf{E}_{\vartheta}[S] = \int_{\mathcal{X}} S(x) h(x) e^{\vartheta T(x)} dx$ .  
Wenn  $t$  so klein, dass  $\vartheta \pm t \in \Theta$ , dann:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \int h(x) |S(x)| \cdot |T(x)|^k e^{\vartheta T(x)} dx \\ & \stackrel{3}{=} \int_{\mathcal{X}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} h(x) |S(x)| \cdot |T(x)|^k e^{\vartheta T(x)} dx \\ & = \int_{\mathcal{X}} |S(x)| h(x) e^{\vartheta T(x) + |t| T(x)} dx \\ & \leq \underbrace{\int_{\mathcal{X}} |S(x)| h(x) e^{(\vartheta+t)T(x)} dx}_{< \infty} + \underbrace{\int_{\mathcal{X}} |S(x)| h(x) e^{(\vartheta-t)T(x)} dx}_{< \infty} \\ & < \infty \end{aligned}$$

Insbesondere:  $ST^k \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P}_\vartheta) \forall \vartheta$  und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int S(x)h(x)T(x)^k e^{\vartheta T(x)} dx \text{ konvergiert absolut zu } \int S(x)h(x)e^{(\vartheta+t)T(x)} dx = u_S(\vartheta + t)$$

Also:  $\vartheta \mapsto u_S(\vartheta)$  ist analytisch, darf unter dem Integral abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} u'_S(\vartheta) &= \int S(x)T(x)h(x)e^{\vartheta T(x)} dx \\ &= e^{b(\vartheta)} \mathbf{E}_\vartheta[ST] \end{aligned}$$

und mit der speziellen Wahl  $S \equiv 1$

$$\begin{aligned} u'_1(\vartheta) &= e^{b(\vartheta)} \mathbf{E}_\vartheta[T], \quad u''_1(\vartheta) = e^{b(\vartheta)} \mathbf{E}_\vartheta[T^2] \text{ mit} \\ b'(\vartheta) &= \frac{d}{d\vartheta} \log u_1(\vartheta) = \frac{u'_1(\vartheta)}{u_1(\vartheta)} = \mathbf{E}_\vartheta[T] =: \tau(\vartheta), \text{ d.h. (i) gilt und} \\ \tau'(\vartheta) &= b'(\vartheta) = \frac{u''_1(\vartheta)}{u_1(\vartheta)} - \left( \frac{u'_1(\vartheta)}{u_1(\vartheta)} \right)^2 = \mathbf{E}_\vartheta[T^2] - (\mathbf{E}_\vartheta[T])^2 = \text{Var}_\vartheta(T). \end{aligned}$$

(ii) Betrachte nun für eine allgemeine Statistik  $S$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} \mathbf{E}_\vartheta[S] &= \frac{d}{d\vartheta} (e^{-b(\vartheta)} u_S(\vartheta)) \\ &= (u'_S(\vartheta) - u_S(\vartheta)b'(\vartheta))e^{-b(\vartheta)} \\ &= \mathbf{E}_\vartheta[ST] - \mathbf{E}_\vartheta[S]\mathbf{E}_\vartheta[T] = \text{Cov}_\vartheta(S, T) \\ &\stackrel{4}{=} \text{Cov}_\vartheta(S, U_\vartheta) \end{aligned}$$

Wähle nun  $S = T$ :

$$\begin{aligned} \tau'(\vartheta) &= \frac{d}{d\vartheta} \int T(x)\rho(x, \vartheta) dx = \mathbf{E}_\vartheta[TU_\vartheta] \\ &= \int T(x) \frac{\frac{d}{d\vartheta} \rho(x, \vartheta)}{\rho(x, \vartheta)} \cdot \rho(x, \vartheta) dx \\ &= \int T(x) \frac{d}{d\vartheta} \rho(x, \vartheta) dx \end{aligned}$$

Und weiter:

$$\frac{d}{d\vartheta} \mathbf{E}_\vartheta[S] = \frac{d}{d\vartheta} \int S(x)\rho(x, \vartheta) dx = \int S(x) \frac{d}{d\vartheta} \rho(x, \vartheta) dx,$$

d.h. (ii) gilt.

(iii)  $I(\vartheta) = \text{Var}_\vartheta(U_\vartheta) = \text{Var}_\vartheta(T) = \tau'(\vartheta)$

□

<sup>3</sup>Satz von der monotonen Konvergenz

<sup>4</sup>Funktioniert, da die Kovarianz translationsinvariant ist und  $U_\vartheta(x) = \frac{d}{d\vartheta} \log \rho(x, \vartheta) = T(x) - b'(\vartheta)$

### 3.8. Korollar:

Wie wir bereits anhand der Cramér-Rao-Schranke gesehen haben, gilt: Für ein (reguläres) exponentielles Modell ist  $T$  ein bester Schätzer für  $\tau(\vartheta) := \mathbf{E}_\vartheta[T] = \frac{b'(\vartheta)}{a'(\vartheta)}$  mit

$$\text{Var}_\vartheta(T) = \frac{\tau'(\vartheta)}{a'(\vartheta)} = \frac{\tau'(\vartheta)^2}{I(\vartheta)}.$$

#### 3.8.1. Beispiel:

Schätzung des Erwartungswertes im normalen Modell bei bekannter Varianz  $v > 0$ :  $\mathbf{P}_\vartheta = \mathcal{N}_{\vartheta, v}$

$$\begin{aligned} \rho(x, \vartheta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{1}{2v}(x - \vartheta)^2\right) \\ &= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{2\pi v}}_{=h(x)}} \cdot \exp\left(\underbrace{x}_{=T(x)} \underbrace{\frac{\vartheta}{v}}_{a(\vartheta)} - \underbrace{\frac{\vartheta^2}{2v}}_{=b(\vartheta)}\right) \end{aligned}$$

Probe:

$$\tau(\vartheta) = \mathbf{E}_\vartheta[T] = \vartheta = \frac{\frac{\vartheta}{v}}{\frac{1}{v}} = \frac{b'(\vartheta)}{a'(\vartheta)}, \text{Var}_\vartheta(T) = \frac{\tau'(\vartheta)}{a'(\vartheta)} = \frac{1}{\frac{1}{v}} = v \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow I(\vartheta) = \frac{1}{v}$$

(Übung: Schätzung der Varianz im normalen Modell bei bekanntem Mittelwert.)

### 3.9. Konsistenz des ML-Schätzers im Produktmodell:

Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{Q}_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$  ein einparametrisches Standardmodell mit Likelihoodfunktion  $\rho(x, \vartheta)$ ,  $\mathbf{P}_\vartheta := \mathbf{Q}_\vartheta^{\otimes \mathbb{N}}$ . Es gelte weiter:

(i)  $\Theta \in \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $\mathbf{Q}_\vartheta \neq \mathbf{Q}_{\vartheta'}$  für  $\vartheta \neq \vartheta'$ .

(ii) Für jedes  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n, n \in \mathbb{N}$  ist

$$\vartheta \mapsto \underbrace{\rho^{\otimes n}((x_1, \dots, x_n), \vartheta)}_{= \prod_{i=1}^n \rho(x_i, \vartheta)}$$

unimodal, d.h.  $\exists T_n = T_n(x_1, \dots, x_n)$ , sodass  $\rho^{\otimes n}((x_1, \dots, x_n), \vartheta)$  wachsend für  $\vartheta < T_n$  und fallend für  $\vartheta > T_n$ .

Dann ist die (eindeutig bestimmte) Folge von (ML-)Schätzern  $(T_n)_n$  konsistent für  $\vartheta$ , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 : \mathbf{P}_\vartheta[|T_n - \vartheta| > \varepsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Beweis:**

Sei  $\vartheta \in \Theta$ ,  $\varepsilon$  so klein, dass  $\vartheta \pm \varepsilon \in \Theta$ ,  $0 < \delta < H(\mathbf{Q}_\vartheta | \mathbf{Q}_{\vartheta \pm \varepsilon})$ ,

$$\left\{ \underbrace{\frac{1}{n} \log \frac{\rho_\vartheta^{\otimes n}}{\rho_{\vartheta \pm \varepsilon}^{\otimes n}}}_{= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{\rho_\vartheta(x_i)}{\rho_{\vartheta \pm \varepsilon}(x_i)}} > \delta \right\} \subseteq \{\rho_\vartheta^{\otimes n} > \rho_{\vartheta \pm \varepsilon}^{\otimes n}\} \stackrel{\text{Unimodalität}}{\subseteq} \{\vartheta - \varepsilon < T_n < \vartheta + \varepsilon\}$$

Wir erwarten:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{\rho_\vartheta(x_i)}{\rho_{\vartheta \pm \varepsilon}(x_i)} \xrightarrow{\text{GGZ}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_\vartheta} \left[ \log \left( \frac{\rho_\vartheta(x_1)}{\rho_{\vartheta \pm \varepsilon}(x_1)} \right) \right],$$

$$\mathbf{E}_\vartheta \left[ \log \left( \frac{\rho_\vartheta(x_1)}{\rho_{\vartheta \pm \varepsilon}(x_1)} \right) \right] = H(\mathbf{Q}_\vartheta | \mathbf{Q}_{\vartheta \pm \varepsilon}) > 0.$$

Wir müssen noch zeigen (o.B.d.A. nur für  $+\varepsilon$ ):

$$\mathbf{P}_\vartheta \left[ \left\{ \frac{1}{n} \log \left( \frac{\rho_\vartheta^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n)}{\rho_{\vartheta + \varepsilon}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n)} \right) > \delta \right\} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (*)$$

Falls  $H(\mathbf{Q}_\vartheta | \mathbf{Q}_{\vartheta + \varepsilon}) < \infty$ , so folgt (\*).

Falls  $H(\mathbf{Q}_\vartheta | \mathbf{Q}_{\vartheta + \varepsilon}) = \infty$ , aber  $\mathbf{Q}_\vartheta(\{\rho_{\vartheta + \varepsilon}(X) = 0\}) = 0$ .

Betrachte:  $h_c(X) := \log \left( \min \left\{ \frac{\rho_\vartheta}{\rho_{\vartheta + \varepsilon}}, c \right\} \right)$  erfüllt  $\mathbf{E}_\vartheta[h_c(X)] < \infty$ , aber gemäß dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt  $\lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\vartheta[h_c(X)] = \infty$ .

$$\mathbf{P}_\vartheta \left[ \frac{1}{n} \log \frac{\rho_\vartheta^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n)}{\rho_{\vartheta + \varepsilon}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n)} > \delta \right] \geq \mathbf{P}_\vartheta \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_c(X_i) > \delta \right]$$

$$\rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Falls  $\mathbf{Q}_\vartheta(\rho_{\vartheta + \varepsilon}(X) = 0) =: a > 0$ . Dann ist

$$\mathbf{P}_\vartheta \left[ \log \frac{\rho_\vartheta^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n)}{\rho_{\vartheta + \varepsilon}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n)} = \infty \right] \geq 1 - (1 - a)^n$$

$$\rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

### 3.9.1. Bemerkung:

(ii) ist sicherlich erfüllt, wenn  $\vartheta \mapsto \log(\rho(x, \vartheta))$  für jedes  $x$  konkav ist.

## 3.10. Satz und Definition: relative Entropie (Kullback-Leibler-Abstand)

Für Maße  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  mit Dichten  $\rho(x)$  bzw.  $\sigma(x)$  bzgl. des Lebesgue-Maßes (oder bzgl. des Zählmaßes, wenn  $\mathcal{X}$  abzählbar ist) heißt

$$H(\mathbf{P} | \mathbf{Q}) := \int_{\mathcal{X}} \rho(x) \log \frac{\rho(x)}{\sigma(x)} dx$$

die *relative Entropie von  $\mathbf{P}$  bzgl.  $\mathbf{Q}$* , es gilt:  $H(\mathbf{P} | \mathbf{Q}) \in [0, \infty]$  und  $H(\mathbf{P} | \mathbf{Q}) = 0 \iff \mathbf{P} = \mathbf{Q}$ .

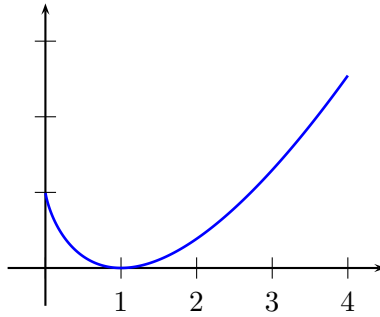


Abbildung 3.1.: Darstellung von  $\psi(s) = 1 - s + s \log s$

Die Funktion  $\psi(s) := 1 - s + s \log s$  ist konvex, setze  $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \sigma(x) = 0, \\ \frac{\rho(x)}{\sigma(x)} & \text{sonst.} \end{cases}$

Es gilt

$$0 \leq \int \psi(f(x))\sigma(x) dx, \int (1 - f(x))\sigma(x)dx = \int \sigma(x) - \rho(x) dx = 0,$$

folglich

$$\int \psi(f(x))\sigma(x) dx = \int (1 - f(x))\sigma(x)dx + \int \frac{\rho(x)}{\sigma(x)} \log \frac{\rho(x)}{\sigma(x)} \sigma(x) dx,$$

d.h.  $H(\mathbf{P}|\mathbf{Q}) \geq 0$  und  $H(\mathbf{Q}|\mathbf{Q}) = 0$ .

Umgekehrt: Sei  $H(\mathbf{P}|\mathbf{Q}) = 0 = \int \psi(f(x))\sigma(x)dx \Rightarrow \mathbf{Q}(\underbrace{\{x : \psi(f(x)) = 0\}}_{=\{x: f(x)=1=\frac{\rho(x)}{\sigma(x)}\}}) = 1$ .

### 3.10.1. Beispiele: Poisson- und Exponentialverteilung

(i) Poissonverteilung: Sei

$\mathbf{E} = \mathbb{Z}_+$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ ,  $\vartheta \in (0, \infty)$ ,  $\rho(x, \vartheta) = e^{-\vartheta} \frac{\vartheta^x}{x!}$ ,  $\log \rho(x, \vartheta) = x \log \vartheta - \vartheta - \log(x!)$  ist (strikt) konkav.

Im Produktmodell ist  $T_n(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  der Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\vartheta$ .

(ii) Exponentialverteilung: Sei  $\rho(x, \vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta x}$ , der ML-Schätzer im Produktmodell ist

$$T_n = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}.$$

### 3.11. Satz:

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes über die Konsistenz des ML-Schätzers im Produktmodell und

(i)  $\vartheta \mapsto \log \rho(x, \vartheta)$  ist dreimal differenzierbar  $\forall x \in \mathcal{X}, \vartheta \in \Theta$ ,

(ii)  $\int \frac{d}{d\vartheta} \rho(x, \vartheta) dx = 0 = \int \frac{d^2}{d\vartheta^2} \rho(x, \vartheta) dx \quad \forall \vartheta \in \Theta$ ,



(iii)  $\left| \frac{d^3}{d\vartheta^3} \log \rho(x, \vartheta) \right| \leq M(x)$  für eine Funktion  $M : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $\sup_{\vartheta \in \Theta} \mathbf{E}_\vartheta[M(X)] < \infty$ .

Dann gilt für den ML-Schätzer  $T_n$  im  $n$ -fachen Produktmodell:

$$\sqrt{n}(T_n - \vartheta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{I(\vartheta)}\right) \text{ in Verteilung unter } \mathbf{P}_\vartheta.$$

### 3.11.1. Bemerkung: Asymptotische Konfidenzintervalle für den ML-Schätzer:

Für  $\alpha > 0$  wähle  $a$  so, dass

$$\int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\alpha}{2}$$

und sei  $T_n$  der ML-Schätzer in obigem Szenario.

Dann ist

$$\mathcal{J} := \left[ T_n - \frac{a}{\sqrt{nI(T_n)}}, T_n + \frac{a}{\sqrt{nI(T_n)}} \right]$$

ein asymptotisches Konfidenzintervall für  $\vartheta$  zum Irrtumsniveau  $\alpha$ , d.h. für jedes  $\vartheta \in \Theta$  gilt

$$\mathbf{P}_\vartheta[\vartheta \in \mathcal{J}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha.$$

### 3.11.2. Beobachtung:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\vartheta \left[ \frac{d^2}{d\vartheta^2} \log \rho(X, \vartheta) \right] &= \int_{\mathcal{X}} \underbrace{\frac{d^2}{d\vartheta^2} (\log \rho(x, \vartheta))}_{\frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{\frac{d}{d\vartheta} \rho(x, \vartheta)}{\rho(x, \vartheta)} \right) = \frac{\frac{d^2}{d\vartheta^2} \rho(x, \vartheta)}{\rho(x, \vartheta)} - \left( \frac{\frac{d}{d\vartheta} \rho(x, \vartheta)}{\rho(x, \vartheta)} \right)^2} \rho(x, \vartheta) dx \\ &= \underbrace{\int \frac{d^2}{d\vartheta^2} \rho(x, \vartheta) dx}_{=0} - \underbrace{\int \left( \frac{\frac{d}{d\vartheta} \rho(x, \vartheta)}{\rho(x, \vartheta)} \right)^2 \rho(x, \vartheta) dx}_{=U_\vartheta(x)} \\ &= -\text{Var}_\vartheta(U_\vartheta) = -I(\vartheta) \end{aligned}$$

#### Beweis des Satzes:

Wir zeigen für  $\vartheta \in \Theta$ :

$$(*) \quad \sqrt{n}(T_n - \vartheta) \cdot I(\vartheta) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{d}{d\vartheta} \log \rho(X_i, \vartheta)}_{U_\vartheta(X_i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ in Verteilung unter } \mathbf{P}_\vartheta.$$

Aus (\*) folgt die Behauptung mit dem ZGWS, denn  $\frac{1}{n} \sum U_\vartheta(X_i) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I(\vartheta))$  unter  $\mathbf{P}_\vartheta$ .

Sei  $U_{\vartheta}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n) := \frac{d}{d\vartheta} \log \rho_{\vartheta}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n U_{\vartheta}(X_i)$ .

$$\begin{aligned} 0 &= U_{T_n}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n) \\ &= U_{\vartheta}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n) + (T_n - \vartheta) \frac{d}{d\vartheta} U_{\vartheta}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n) + \frac{1}{2} (T_n - \vartheta)^2 \frac{d^2}{d\vartheta^2} U_{\tilde{T}_n}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n) \\ &\quad \text{mit einem } \tilde{T}_n \in [\min\{T_n, \vartheta\}, \max\{T_n, \vartheta\}] \text{ (Taylorentwicklung)}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{1}{n} \frac{d}{d\vartheta} U_{\vartheta}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{d^2}{d\vartheta^2} \log \rho(X_i, \vartheta) \xrightarrow{d} \mathbf{E}_{\vartheta} \left[ \frac{d^2}{d\vartheta^2} \log \rho(X_1, \vartheta) \right] = -I(\vartheta)$$

und

$$\left| \frac{1}{n} \frac{d^2}{d\vartheta^2} U_{T_n}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{d^3}{d\vartheta^3} \log \rho(X_i, \tilde{T}_n) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i),$$

also  $\frac{1}{n} \frac{1}{2} (T_n - \vartheta) \frac{d^2}{d\vartheta^2} U_{T_n}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  in Verteilung unter  $\mathbf{P}_{\vartheta}$ , den  $(T_n)$  ist konsistent für  $\vartheta$ . Weiter gilt

$$\sqrt{n}(T_n - \vartheta) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{n}} U_{\vartheta}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n)}{\frac{1}{n} \left( \frac{d}{d\vartheta} U_{\vartheta}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n) + \frac{1}{2} (T_n - \vartheta) \frac{d^2}{d\vartheta^2} U_{T_n}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n) \right)},$$

somit

$$\begin{aligned} &\sqrt{n}(T_n - \vartheta) I(\vartheta) - \frac{1}{\sqrt{n}} U_{\vartheta}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{n}} U_{\vartheta}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n)}_{\rightarrow \mathcal{N}(0, I(\vartheta))} \dots \\ &\quad \dots \cdot \left( 1 - \frac{I(\vartheta)}{\underbrace{\frac{1}{n} \frac{d}{d\vartheta} U_{\vartheta}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n)}_{\rightarrow -I(\vartheta)} + \underbrace{\frac{1}{2n} (T_n - \vartheta) \frac{d^2}{d\vartheta^2} U_{T_n}^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n)}_{\rightarrow 0}} \right) \\ &\rightarrow 0 \text{ in Verteilung.} \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Seien  $Y_n, Z_n$  ZVN,  $Z_n \xrightarrow{d} Z, Y_n \xrightarrow{d} 0$ , dann gilt  $Y_n \cdot Z_n \xrightarrow{d} 0$ .

## 4. Exkurs: Bedingte Erwartung und Anwendungen

- (o) Diskreter Fall:  $X, Y$  reellwertig, mit abzählbarem Wertebereich, gemeinsame Gewichte  $\rho_{X,Y}(x, y)$ , Marginalgewichte  $\rho_X(x) = \sum_y \rho_{X,Y}(x, y)$ ,  $\rho_Y(y) = \sum_x \rho_{X,Y}(x, y)$ . Weiter gelte:  $\mathbf{E}[|X|] < \infty$ . Sei

$$\varphi(y) := \sum_x \frac{x \rho_{X,Y}(x, y)}{\rho_Y(y)},$$

$\varphi(Y)$  ist in diesem Szenario die bedingte Erwartung von  $X$  gegeben  $Y$ .

- (i) Seien  $X, Y$  reellwertig mit gemeinsamer Dichte  $f_{X,Y}$  bzgl. Lebesgue-Maß (d.h.  $\mathbf{P}[(X, Y) \in A] = \int_A f_{X,Y}(x, y) d(x, y)$ ), Marginaldichten  $f_X$ , bzw.  $f_Y$ , es gelte  $\mathbf{E}[|X|] < \infty$ .

$$\varphi(y) = \int_{\mathbb{T}} x \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} dx,$$

$\varphi(Y)$  würden wir in diesem Szenario plausiblerweise die bedingte Erwartung von  $X$  gegeben  $Y$  nennen.

- (ii) Allgemeiner Fall: Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $X$  eine reellwertige ZV auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  mit endlichem Erwartungswert ( $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ )<sup>1</sup>,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  eine Teil- $\sigma$ -Algebra.

### 4.1. Definition: Bedingte Erwartung

Eine reellwertige ZV  $Z$  heißt bedingte Erwartung von  $X$  gegeben  $\mathcal{G}$  (schreibe  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ ), wenn gilt

- (1)  $Z$  ist  $\mathcal{G}$ -messbar, d.h.  $\{Z \in B\} \in \mathcal{G}$  für jede messbare Teilmenge  $B \subset \mathbb{R}$ ,
- (2)  $\mathbf{E}[H \cdot Z] = \mathbf{E}[H \cdot X]$  für alle beschränkten  $\mathcal{G}$ -messbaren ZVn  $H$ .

### 4.2. Satz: Existenz und Eindeutigkeit der bedingten Erwartung:

Für  $X$  mit  $\mathbf{E}[|X|] < \infty$  existiert  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$  und ist eindeutig (bis auf f.s. Gleichheit).

<sup>1</sup>Wir fassen  $X$  und  $X'$  als (fast sicher) gleich auf, wenn  $\mathbf{P}[X \neq X'] = 0$ .

**Beobachtung:**

Im Szenario von (o): Betrachte  $\mathcal{G} = \sigma(Y) = \{Y^{-1}(B) : B \in \mathbf{P}(E_Y)\}$ , mit  $E_Y =$  Wertebereich von  $Y$ .  $Z := \varphi(Y)$  ist  $\sigma(Y)$ -messbar. Sei  $H = h(Y)$  (Übung: Jede  $\sigma(Y)$ -messbare ZV ist hier von dieser Form). Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[H \cdot Z] &= \sum_y h(y) \underbrace{\varphi(y)}_{\rho_Y(y)} \rho_Y(y) = \sum_{x,y} h(y) x \rho_{X,Y}(x,y) = \mathbf{E}[H \cdot X]. \\ &= \frac{1}{\rho_Y(y)} \sum_x x \rho_{X,Y}(x,y) \end{aligned}$$

**Beweis:**

**Eindeutigkeit:** Seien  $Z, Z'$  bedingte Erwartungen.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Z \cdot \mathbf{1}_{\{Z > Z'\}}] &= \mathbf{E}[X \cdot \mathbf{1}_{\{Z > Z'\}}] = \mathbf{E}[Z' \mathbf{1}_{\{Z > Z'\}}] \\ \Rightarrow \mathbf{E}[(Z - Z') \mathbf{1}_{\{Z > Z'\}}] &= 0 \quad \Rightarrow \mathbf{P}[Z > Z'] = 0, \end{aligned}$$

analog  $\mathbf{P}[Z < Z'] = 0 \Rightarrow \mathbf{P}[Z = Z'] = 1 \Rightarrow Z = Z'$  fast sicher.

**Existenz:** Betrachte zunächst  $X$  mit  $\mathbf{E}[X^2] < \infty$ .

**Bemerkung:**  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle X, Y \rangle = \mathbf{E}[X \cdot Y]$ .

Betrachte nun  $\mathcal{H}' := \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P}) \subseteq \mathcal{H}$  ist ein Unterraum,  $Z := pr_{\mathcal{H}'}(X)$ , d.h.  $Z$  ist dasjenige Element von  $\mathcal{H}'$  mit  $\mathbf{E}[(X - Z)^2] \leq \mathbf{E}[(X - Z')^2] \forall Z' \in \mathcal{H}'$ .

Sei  $H \in \mathcal{H}'$  (beschränkt), dann ist  $\langle Z - X, H \rangle = 0 = \mathbf{E}[(Z - X)H] \Rightarrow$  (ii)  $\checkmark$ .

Rücktransfer nach  $\mathcal{L}^1$ : Für  $X \in \mathcal{L}^1$  zerlege  $X = X_+ - X_-$ ,  $\mathbf{E}[(\min\{X_+, n\})|\mathcal{G}] =: Z_+$  existiert (Monotonie). Dann folgt

$$\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = Z_+ - Z_-.$$

**4.3. Eigenschaften der bedingten Erwartung:**

- (i)  $\mathbf{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]$  für  $a, b \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$
- (ii)  $X \geq Y$  f.s.  $\Rightarrow \mathbf{E}[X|\mathcal{G}] \geq \mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]$
- (iii)  $\mathbf{E}[|XY|] < \infty, Y$   $\mathcal{G}$ -messbar  $\Rightarrow \mathbf{E}[XY|\mathcal{G}] = Y \cdot \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$
- (iv) Sind  $X$  und  $\mathcal{G}$  unabhängig ( $\mathbf{P}[\{X \in B\} \cap A] = \mathbf{P}[\{X \in B\}]\mathbf{P}[A] \forall A \in \mathcal{G}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ), so ist  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbf{E}[X]$ .
- (v)  $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbf{E}[X]$

**Beweis:**

- (ii)  $A = \{\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] < \mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]\} \in \mathcal{G}$ ,

$$0 \leq \mathbf{E}[(X - Y) \cdot \mathbf{1}_A] = \mathbf{E}[(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] - \mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]) \mathbf{1}_A]$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}[A] = 0$$

(iii) Betrachte zunächst  $Y$  beschränkt, dann gilt

$$\mathbf{E}[\overbrace{H \cdot Y}^{=H'} \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbf{E}[XH'] = \mathbf{E}[(XY)H]$$

für jedes beschränkte  $\mathcal{G}$ -messbare  $H$ .

Allgemeiner Fall via Approximation und monotone Konvergenz.

### 4.3.1. Bemerkung: Zur Existenz der regulären bedingten Verteilung

Für  $A \in \mathcal{F}$  ist  $\mathbf{P}[A|\mathcal{G}] := \mathbf{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{G}]$  die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$  gegeben  $\mathcal{G}$ . Im Allgemeinen ist  $\mathbf{P}[A|\mathcal{G}]$  nur bis auf  $\mathbf{P}$ -Nullmenge definiert, und es ist zunächst unklar, ob die (u.U. überabzählbar vielen) Ausnahme-Nullmengen, die sich ergeben, wenn man  $A$  über ganz  $\mathcal{F}$  variiert, kompatibel gewählt werden können. Insbesondere wünschen wir uns

$$\mathbf{P} \left[ \bigcup_n A_n \middle| \mathcal{G} \right] = \sum_n \mathbf{P}[A_n|\mathcal{G}]$$

für jede abzählbare Familie  $(A_n) \subset \mathcal{F}$  von (paarw.) disjunkten  $A_n$ .

Seien  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  messbare Räume,  $k : \Omega_1 \times \mathcal{F}_2 \rightarrow [0, 1]$  heißt *stochastischer Kern*, wenn

- (i)  $\omega_1 \mapsto k(\omega_1, B)$  messbar ist  $\forall B \in \mathcal{F}_2$  und
- (ii)  $\forall \omega_1 \in \Omega_1 : k(\omega_1, \cdot)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega_2$  ist.

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ,  $Y$  reellwertige ZV auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$  Teil- $\sigma$ -Algebra, dann gibt es einen stochastischen Kern  $k_{Y|\mathcal{F}}$  von  $(\Omega, \mathcal{F})$  nach  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mit

$$k_{Y|\mathcal{F}}(\omega, B) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_B(Y)|\mathcal{F}], \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

für  $\mathbf{P}$ -f.a.  $\omega$ .

Wir konstruieren dazu eine zufällige Verteilungsfunktion. Betrachte  $B = (-\infty, r], r \in \mathbb{Q}$ , setze

$$F_r := \mathbf{E}[\mathbf{1}_{(-\infty, r]}(Y)|\mathcal{F}].$$

Dann gilt wie gewünscht  $\mathbf{P}$ -f.s.:  $F_r \leq F_{r'}$ , für  $r < r'$ , ( $r, r' \in \mathbb{Q}$ ),  $\lim_n F_{r+\frac{1}{n}} = F_r$  für  $r \in \mathbb{Q}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} F_n = 0.$$

Wegen der Abzählbarkeit von  $\mathbb{Q}$  gibt es  $N \in \mathcal{A}$  mit  $\mathbf{P}(N) = 0$ , so dass obiges für  $\omega \in \Omega \setminus N$  und alle  $r, r' \in \mathbb{Q}$  gilt. Dann definiert

$$\tilde{F}_s := \begin{cases} \inf\{F_r : r \geq s, r \in \mathbb{Q}\}, & \omega \in \Omega \setminus N, \\ \overline{F}_s, & \omega \in N, \end{cases}$$

wobei  $\overline{F}$  irgendeine Verteilungsfunktion ist, die (zufällige) Verteilungsfunktion von  $k_{Y|\mathcal{F}}$ . Details finden sich beispielsweise in A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Abschn. 8.28, oder in Übungsaufgabe 3 auf Blatt 3, in der wir den allgemeinen Fall polnischer Wertebereiche behandelt haben.

## 4.4. Suffizienz:

Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\vartheta, \vartheta \in \Theta)$  ein statistisches (Standard-)Modell. Eine Statistik  $T : \mathcal{X} \rightarrow \Sigma$  heißt *suffizient*, wenn  $\mathbf{P}_\vartheta[\cdot | T = t] = \mathbf{Q}_t(\cdot)$  für alle  $\vartheta \in \Theta$  und  $t$  aus dem Wertebereich von  $T$  (d.h. wenn die Verteilung von  $X$  gegeben  $T$  nicht von  $\vartheta$  abhängt).

### Bemerkung:

Für ein Standardmodell mit Likelihood funktion  $\rho(x, \vartheta)$  ist  $T$  suffizient  $\iff \rho(x, \vartheta) = h(x) \cdot \Psi_\vartheta(T(x))$ , für ein  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\Psi_\cdot(\cdot) : \Theta \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ . In einer exponentiellen Familie mit Likelihood-Funktion  $\rho(x, \vartheta) = h(x) \cdot \exp(a(\vartheta)T(x) - b(\vartheta))$  ist  $T$  eine suffiziente Statistik.

## 4.5. Satz von Rao-Blackwell

Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$  ein statistisches Modell,  $T$  eine suffiziente Statistik,  $S$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\tau(= \tau(\vartheta))$ ,  $\mathbf{E}_\vartheta[S^2] < \infty$ ,  $g_S(t) := \mathbf{E}_\vartheta[S|T = t] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_t}[S]$  und .

Dann ist  $\tilde{S} = g_S(T)$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\tau(\vartheta)$  mit  $\text{Var}_\vartheta(\tilde{S}) \leq \text{Var}_\vartheta(S) \forall \vartheta \in \Theta$  (Ungleichung ist strikt, es sei denn  $S$  ist eine Funktion von  $T$ ).

### Beweis:

$$\mathbf{E}_\vartheta[\tilde{S}] = \mathbf{E}_\vartheta[\mathbf{E}_\vartheta[S|T]] = \mathbf{E}_\vartheta[S] = \tau(\vartheta)$$

Es gilt allgemein:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \underbrace{\text{Var}(\mathbf{E}[X|\mathcal{F}])}_{= \mathbf{E}[(\mathbf{E}[X|\mathcal{F}])^2] - \mathbf{E}[X]^2} + \mathbf{E}[\underbrace{V(X|\mathcal{F})}_{:= \mathbf{E}[X^2|\mathcal{F}] - \mathbf{E}[X|\mathcal{F}]^2}] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[X^2|\mathcal{F}]] - \mathbf{E}[X]^2 \\ &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\text{Var}_\vartheta(S) = \text{Var}_\vartheta(\underbrace{\mathbf{E}_\vartheta[S|T]}_{\tilde{S}}) + \underbrace{\mathbf{E}[\text{Var}_\vartheta(S|T)]}_{\geq 0} \Rightarrow \text{Var}_\vartheta(S) \geq \text{Var}_\vartheta(\tilde{S})$$

## 4.6. Definition: Vollständigkeit

Eine Statistik  $T$  heißt *vollständig*, wenn für alle messbaren  $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{E}_\vartheta[|g(T)|] < \infty$  aus  $\mathbf{E}_\vartheta[g(T)] = 0 \forall \vartheta \in \Theta$  folgt  $g \equiv 0$   $\mathbf{P}_\vartheta$ -f.s.  $\forall \vartheta$ .

### 4.6.1. Beispiel:

Seien  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\text{Ber}(\vartheta)$ ,  $\vartheta \in [0, 1]$ . Dann ist  $T_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$  ist vollständig.

### 4.6.2. Bemerkung: Eindeutigkeit der Rao-Blackwellisierung

Für ein vollständiges  $T$  ist die „Rao-Blackwellisierung“ erwartungstreuer Schätzer für  $\tau(\vartheta)$  eindeutig.

## 4.7. Satz von Lehmann-Scheffé

Sei  $T$  suffizient und vollständig,  $S, S'$  erwartungstreue Schätzer für  $\tau(\vartheta)$ , dann gilt  $\tilde{S} = \mathbf{E}_{\vartheta}[S|T] = \mathbf{E}_{\vartheta}[S'|T]$  und  $\tilde{S}$  ist der beste Schätzer für  $\tau(\vartheta)$ .

**Beweis:**

$g(t) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_t}[S] - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_t}[S'], \mathbf{E}_{\vartheta}[g(T)] = \tau(\vartheta) - \tau(\vartheta) = 0$ , d.h.  $g \equiv 0$ . Nach dem Satz von Rao-Blackwell gilt  $\text{Var}_{\vartheta}(\tilde{S}) \leq \text{Var}_{\vartheta}(S) \forall \vartheta \forall$  erwartungstreue Schätzer  $S$ .

### 4.7.1. Bemerkung:

In einer (einparametrischen) exponentiellen Familie ( $\rho(x, \vartheta) = h(x) \cdot \exp(a(\vartheta)T(x) - b(\vartheta))$ ) ist  $T$  eine vollständige und suffiziente Statistik.

**Zur Vollständigkeit: (o.B.d.A.  $a(\vartheta) = \vartheta$ )**

$$0 = \int_{\mathcal{X}} g(T(x))h(x)e^{\vartheta T(x)-b(\vartheta)} dx = \int_{\Sigma} g(t)e^{\vartheta t} \nu(dt) = \int_{\Sigma} g_+(t)e^{\vartheta t} \nu(dt) - \int_{\Sigma} g_-(t)e^{\vartheta t} \nu(dt),$$

wobei  $\nu$  das Bildmaß von  $h(x)dx$  ist unter der Abbildung  $x \mapsto T(x)$  ist, und  $g = g_+ - g_-$  mit  $g_+, g_- \geq 0$ . Die Eindeutigkeit der Laplace-Transformierten erzwingt dann  $g_+ = g_-$ , also  $g = 0$ , für Details siehe z.B. Erich Lehmann, *Testing statistical hypotheses*, S. 132.





## 5. Bayes-Schätzer

### Erinnerung (Satz von Bayes):

Für Ereignisse  $A, B$ , mit  $\mathbf{P}[A], \mathbf{P}[B] > 0$  gilt

$$\mathbf{P}[A|B] = \frac{\mathbf{P}[B|A] \cdot \mathbf{P}[A]}{\mathbf{P}[B]}.$$

### 5.1. Definition: A-priori-Dichte und -Maß

Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d)$  ein parametrisches Standardmodell mit  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\Theta)$ -messbarer Likelihood-Funktion  $\rho(x, \vartheta)$ . Wir nennen eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $\alpha : \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine *A-priori-Dichte*. (Das Maß mit Dichte  $\alpha$  heißt *A-priori-Maß* oder *Vorbewertung*)

$$\pi_x(\vartheta) := \frac{\alpha(\vartheta)\rho(x, \vartheta)}{\int_{\Theta} \alpha(t)\rho(x, t) dt}$$

heißt dann die *A-posteriori-Dichte*.

Sei  $\tau : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  (mit  $\int (\tau(\vartheta))^2 \alpha(\vartheta) d\vartheta < \infty$ ). Dann heißt

$$T(x) := \mathbf{E}_{\pi_x}[\tau] = \int \tau(\vartheta)\pi_x(\vartheta) d\vartheta$$

*Bayes-Schätzer* für  $\tau$  (zur Vorbewertung  $\alpha(\vartheta)d\vartheta$ ).

$$F_\alpha(S) := \int_{\Theta} \int_{\mathcal{X}} (S(x) - \tau(\vartheta))^2 \rho(x, \vartheta) dx \alpha(\vartheta) d\vartheta$$

heißt der *erwartete quadratische Fehler* (zur Vorbewertung  $\alpha(\vartheta)d\vartheta$ ).

### Beispiel:

Eine Situation, in der diese Philosophie sinnvoll ist, könnte folgende sein: Nehmen wir an, ein Versicherungsnehmer hat jedes Jahr mit einer gewissen (zu ihm „gehörigen“) Wahrscheinlichkeit  $\vartheta$  einen Schadensfall (unabhängig über die Jahre), und  $\alpha(\vartheta)d\vartheta$  beschreibt die Verteilung der Schadenswahrscheinlichkeiten aller Kunden dieser Versicherung (diese Verteilung sei der Versicherung aus Erfahrungswerten bekannt).

Mit  $\rho(x, \vartheta) = \text{Bin}_{n, \vartheta}(x)$  ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein „typischer Kunde“ in  $n$  Jahren  $k$  Schadensfälle verursacht  $\int_0^1 \alpha(\vartheta)\rho(k, \vartheta) d\vartheta$ , und  $\pi_k(\vartheta)$  ist die Verteilung der Schadenswahrscheinlichkeit pro Jahr eines Kunden, bedingt darauf, dass er in den letzten  $n$  Jahren  $k$  Schäden hatte. Diese Information kann die Versicherung beispielsweise für Vertragsverlängerung, Tarifanpassung, etc. benutzen.

## 5.2. Satz:

Der Bayes-Schätzer  $T$  für  $\tau(\vartheta)$  minimiert den erwarteten quadratischen Fehler (jeweils zur Vorbewertung  $\alpha(\vartheta)d\vartheta$ ).

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 F_\alpha(S) - F_\alpha(T) &= \int_{\Theta} \int_{\mathcal{X}} \left[ \underbrace{(S(x) - \tau(\vartheta))^2 - (T(x) - \tau(\vartheta))^2}_{=S(x)^2 - 2S(x)\tau(\vartheta) - T(x)^2 + 2T(x)\tau(\vartheta)} \right] \underbrace{\overbrace{\int_{\Theta} \alpha(t)\rho(x,t)dt}^{=: \rho_\alpha(x)}}_{\rho(x,\vartheta)\alpha(\vartheta)} dx d\vartheta \\
 &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathcal{X}} \int_{\Theta} (S(x)^2 - 2S(x)\tau(\vartheta) - T(x)^2 + 2T(x)\tau(\vartheta)) \pi_x(\vartheta) d\vartheta \rho_\alpha(x) dx \\
 &= \int_{\mathcal{X}} \underbrace{(S(x)^2 - 2S(x)T(x) - T(x)^2)}_{=(S(x)-T(x))^2} \rho_\alpha(x) dx \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

## 6. Konfidenzintervalle:

### 6.1. Definition: Konfidenzbereich zum Irrtumsniveau $\alpha$

Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$  ein statistisches Modell,  $\tau : \Theta \rightarrow \Sigma$  ein Parametermerkmal,  $\alpha \in (0, 1)$ . Eine Abbildung  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma)$  heißt ein *Konfidenzbereich* zum *Irrtumsniveau*  $\alpha$  (oder zum *Sicherheitsniveau*  $1 - \alpha$ ), wenn

$$\forall \vartheta \in \Theta : \mathbf{P}_\vartheta[\{x : C(x) \ni \vartheta\}] \geq 1 - \alpha.$$

#### Bemerkung:

Stets ist  $C(x) = \Sigma$  ein (trivialer) Konfidenzbereich.

#### 6.1.1. Beispiel: Konfidenzintervalle im Binomialmodell

Wir betrachten das statistische Modell  $(\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, n\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathcal{X}), \mathbf{P}_\vartheta = \text{Bin}_{n, \vartheta})$ .

#### Erinnerung:

$T = \frac{X}{n}$  ist der beste Schätzer für  $\vartheta$ , wenn  $X$  die Anzahl der Einsen zählt.

(i) Anwendung der Čebyšev-Ungleichung, Ansatz:

$$C(x) = \left(\frac{x}{n} - \varepsilon, \frac{x}{n} + \varepsilon\right).$$

$$\mathbf{P}_\vartheta[\{C(X) \ni \vartheta\}] = \mathbf{P}_\vartheta \left[ \left| \frac{X}{n} - \vartheta \right| > \varepsilon \right],$$

$$1 - \mathbf{P}_\vartheta[\{C(X) \ni \vartheta\}] = \mathbf{P}_\vartheta \left[ \left| \frac{X}{n} - \vartheta \right| > \varepsilon \right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}_\vartheta \left( \frac{X}{n} \right) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{\varepsilon^2 n} \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n} \stackrel{!}{=} \alpha,$$

d.h. wähle  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}$ .

(ii) Normalapproximation:  $(\frac{X}{n} \approx \mathcal{N}(\vartheta, \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}))$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\vartheta \left[ \left| \frac{X}{n} - \vartheta \right| < \varepsilon \right] &\approx \mathbf{P}_\vartheta \left[ \left| \sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}} Z \right| < \varepsilon \right] \quad \text{mit } Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ &= \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}\right) - 1, \end{aligned}$$

wähle  $\varepsilon \geq \sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$  (praktisch:  $\varepsilon := \frac{1}{2\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ ).

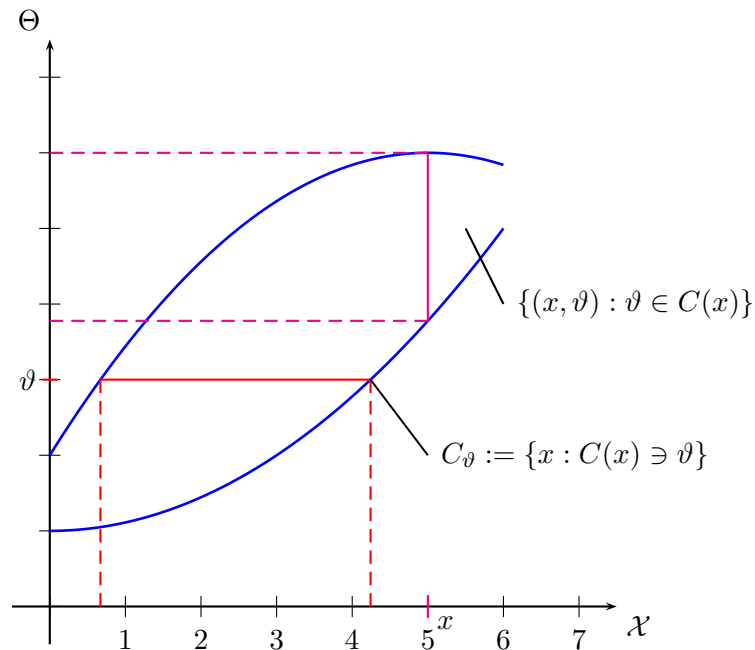


Abbildung 6.1.: Darstellung von Konfidenzbereichen in der  $x$ - $\vartheta$ -Ebene: Es soll  $\mathbf{P}_\vartheta[C_\vartheta] \geq 1 - \alpha$  gelten.

Für ein Standardmodell (mit Likelihood-Funktion  $\rho(x, \vartheta)$ ) setze  $C_\vartheta := \{x : \rho(x, \vartheta) \geq c_\vartheta\}$  für  $c_\vartheta$  so groß wie möglich, sodass immer noch  $\mathbf{P}_\vartheta[C_\vartheta] \geq 1 - \alpha$  erfüllt ist.

## 6.2. Definition: Quantil, Fraktile und Median

Sei  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .  $q \in \mathbb{R}$  heißt  $\alpha$ -Quantil von  $\mu$ , wenn  $\mu((-\infty, q)) \geq \alpha$  und  $\mu([q, \infty)) \geq 1 - \alpha$  (eindeutig, wenn die Verteilungsfunktion  $F_\mu$  strikt monoton wächst).

Sprechweise: Ein  $(1 - \alpha)$ -Quantil heißt auch ein  $\alpha$ -Fraktile, ein  $\frac{1}{2}$ -Quantil heißt auch Median.

### Fortsetzung des Beispiels zum Binomialmodell:

(iii) Exakte Konfidenzintervalle im Binomialmodell:

#### 6.2.1. Lemma:

- (1) Für  $\vartheta \in (0, 1)$  ist  $\{0, \dots, n\} \ni x \mapsto \text{Bin}_{n, \vartheta}(\{x\})$  strikt wachsend auf  $\{0, 1, \dots, \lceil (n+1)\vartheta - 1 \rceil\}$ , strikt fallend auf  $\{\lfloor (n+1)\vartheta \rfloor, \dots, n\}$ , also maximal auf  $x = \lfloor (n+1)\vartheta \rfloor$  (und auf  $(n+1)\vartheta - 1$ , wenn  $(n+1)\vartheta \in \mathbb{Z}$ ).
- (2) Für  $x \in \{1, \dots, n\}$  ist  $[0, 1] \ni \vartheta \mapsto \text{Bin}_{n, \vartheta}(\{x, x+1, \dots, n\})$  stetig, strikt monoton wachsend mit

$$\text{Bin}_{n, \vartheta}(\{x, y+1, \dots, n\}) = \mathcal{B}_{x, n-x+1}([0, \vartheta]),$$

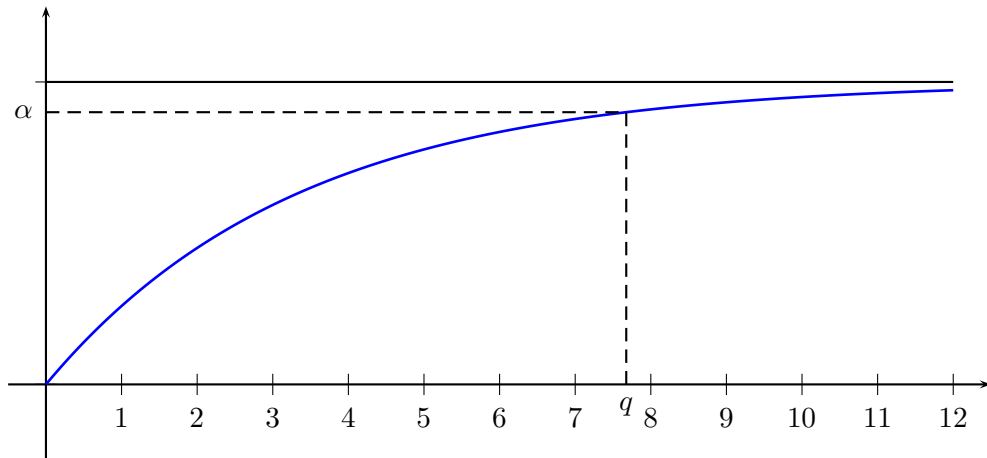


Abbildung 6.2.: Darstellung des  $\alpha$ -Quantils  $q$  einer Verteilung mit stetiger, strikt monoton wachsender Verteilungsfunktion (die blaue Kurve)

wo  $\mathcal{B}_{a,b}$  (die Beta-Verteilung) die Dichte

$$f_{\mathcal{B}_{a,b}}(u) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} (1-u)^{b-1}$$

auf  $(0,1)$  hat.

**Beweis:**

(1)

$$\begin{aligned} \frac{\text{Bin}_{n\vartheta}(\{x\})}{\text{Bin}_{n\vartheta}(\{x-1\})} &= \frac{\binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x}}{\binom{n}{x-1} \vartheta^{x-1} (1-\vartheta)^{n-x+1}} \\ &= \frac{(n-x+1)\vartheta}{x(1-\vartheta)} \\ &> 1 \\ \iff x &< (n+1)\vartheta \end{aligned}$$

(2)  $U_1, \dots, U_n$  unabhängig und uniform auf  $[0,1]$ ,

$$S_\vartheta := \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,\vartheta]}(U_i)$$

ist  $\text{Bin}_{n,\vartheta}$ -verteilt.

Sei  $U_{(1)} < U_{(2)} < \dots < U_{(n)}$  die „Ordnungsstatistik“.

$$\begin{aligned}
& \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x, \dots, n\}) \\
&= \mathbf{P}[S_\vartheta \geq x] \\
&= \mathbf{P}[U_{(x)} \leq \vartheta] \\
&= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\substack{B \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{k\} \\ |B|=x-1}} \underbrace{\mathbf{P}[U_k \leq \vartheta, U_m \leq U_k \text{ für } m \in B, U_l > U_k \text{ für } l \in \{1, \dots, n\} \setminus (\{k\} \cup B)]}_{\substack{= \int_0^\vartheta u^{|B|} (1-u)^{n-|B|-1} du = \int_0^\vartheta u^{x-1} (1-u)^{n-x} du}} \right) \\
&= \frac{n \binom{n-1}{x-1}}{(x-1)!(n-x)!} \int_0^\vartheta u^{x-1} (1-u)^{n-x} du \\
&= \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(x)\Gamma(n-x+1)}
\end{aligned}$$

Zurück zum Binomialmodell:

Wähle  $C_\vartheta := \{x_-(\vartheta), x_-(\vartheta) + 1, \dots, x_+(\vartheta)\}$  mit  
 $x_-(\vartheta) = \max\{x : \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{0, \dots, x-1\}) \leq \frac{\alpha}{2}\}$  und  
 $x_+(\vartheta) = \min\{x : \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x+1, \dots, n\}) \leq \frac{\alpha}{2}\}$ .

Es gilt:

- $x \leq x_+(\vartheta) \iff \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x, \dots, n\}) = \mathcal{B}_{x, n-x+1}([0, \vartheta]) > \frac{\alpha}{2}$   
 $\iff \vartheta > p_-(x) := \frac{\alpha}{2}\text{-Quantil von } \mathcal{B}_{x, n-x+1}$ .
- $x \geq x_+(\vartheta) \iff \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{0, \dots, x\}) = 1 - \text{Bin}(\{x+1, \dots, n\}) = \mathcal{B}_{x+1, n-x}([\vartheta, 1]) \geq \frac{\alpha}{2}$   
 $\iff \vartheta < p_+(x) := \frac{\alpha}{2}\text{-Fraktile von } \mathcal{B}_{x+1, n-x}$ .

### 6.2.2. Satz: exaktes Konfidenzintervall im Binomialmodell

Die Abbildung  $x \mapsto (p_-(x), p_+(x))$  definiert im Binomialmodell ein Konfidenzintervall für  $\vartheta$  zum Irrtumsniveau  $\alpha$ .

Siehe auch Abbildung 6.3 für Illustration und Vergleich der in diesem Abschnitt betrachteten Konfidenzintervalle.

## 6.3. Konfidenzintervalle im Gauß'schen Modell

Sei  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(m, v)$ ,  $M := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $V^* := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$  sind erwartungstreue Schätzer für  $m$  bzw.  $v$ .

Ansatz für ein Konfidenzintervall für  $m$ :  $(M \pm a\sqrt{V^*})$ .

**Behauptung:**

$M - m$  und  $V^*$  sind unabhängig, und für jedes  $(m, v)$  ist  $\frac{\sqrt{n}(M - m)}{\sqrt{V^*}}$  Student-verteilt mit  $n - 1$  Freiheitsgraden („ $t_{n-1}$ -verteilt“).

**6.3.1. Satz:**

Sei  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $t := \frac{\alpha}{2}$ -Fraktile der  $t_{n-1}$ -Verteilung. Dann ist

$$\left(M - t\sqrt{\frac{V^*}{n}}, M + t\sqrt{\frac{V^*}{n}}\right)$$

ein Konfidenzintervall für  $m$  zum Sicherheitsniveau  $1 - \alpha$ .

**Beweis:**

Klar, denn

$$\mathbf{P}_{m,v} \left[ \left| \frac{\sqrt{n}(M - m)}{\sqrt{V^*}} \right| \geq t \right] = \alpha.$$

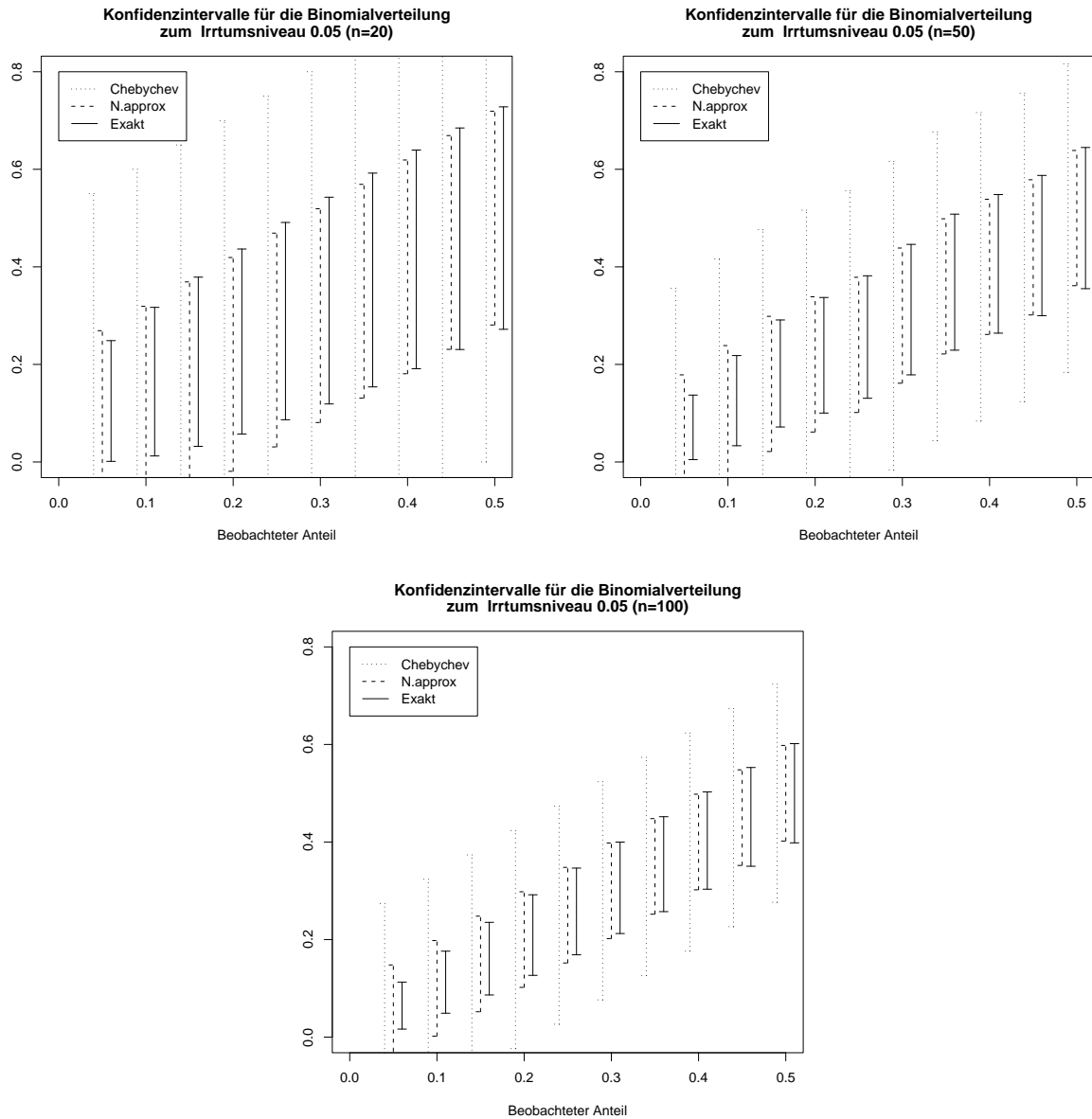


Abbildung 6.3.: Konfidenzintervalle zum Niveau 0.05 für den Erfolgsparameter im Binomialmodell, basierend auf Chebyshev-Ungleichung, Normalapproximation und auf Satz 6.2.2, als Funktion des beobachteten Anteils der Erfolge, für  $n \in \{20, 50, 100\}$ . Siehe Abschnitt A.1 für den R-Code zur Erzeugung dieser Bilder.



# 7. Exkurs: mehrdimensionale Normalverteilung

## 7.1. Dichtentransformationssatz:

Sei  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{X}$  mit Dichte  $\rho$ ,  $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  Diffeomorphismus<sup>1</sup>. Sei

$$DT = \left( \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \right) \text{ die Jacobi-Matrix, } \det DT \neq 0 \text{ auf } \mathcal{X}.$$

Dann hat  $Q := P \circ T^{-1}$  die Dichte  $|\det DT^{-1}(y)|\rho(T^{-1}(y))$

## 7.2. Erinnerung: $\Gamma_{a,b}$ -Verteilung

Sei  $\Gamma_{a,b}$  die Gamma-Verteilung mit Skalenparameter  $a$  und Formparameter  $b$ . Sie hat die Dichte

$$\frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-ax} \text{ auf } (0, \infty)$$

Bemerkung:  $X \sim \Gamma_{a,b} \Rightarrow cX \sim \Gamma_{\frac{a}{c}, b}$

### Beobachtung:

- $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , so ist  $X^2 \sim \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$  (diese Verteilung heißt auch  $\chi_1^2$ -Verteilung).
- $|X|$  hat Dichte

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ auf } (0, \infty).$$

Betrachte  $T : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto x^2$ . Dann ist

$$T^{-1}(y) = \sqrt{y}, \frac{d}{dy} T^{-1}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

also hat  $X^2$  die Dichte

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}.$$

### 7.2.1. Proposition:

Sei  $a, r, s > 0$ .  $X \sim \Gamma_{a,r}$ ,  $Y \sim \Gamma_{a,s}$  unabhängig. Dann sind  $X + Y$  und  $\frac{X}{X + Y}$  unabhängig und

$$X + Y \sim \Gamma_{a,r+s}, \frac{X}{X + Y} \sim \mathcal{B}_{r,s}$$

<sup>1</sup>d.h. bijektiv,  $T$  und  $T^{-1}$  stetig differenzierbar.

<sup>2</sup>Die Beta-Verteilung  $\mathcal{B}_{r,s}$  hat die Dichte

$$\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} u^{r-1} (1-u)^{s-1}.$$

**Beweis:**

$(X, Y)$  hat Dichte

$$\frac{a^{r+s}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} x^{r-1} y^{s-1} e^{-a(x+y)} \text{ auf } (0, \infty)^2.$$

Sei

$$T(x, y) = \left( \frac{x+y}{x} \right), T^{-1}(z, u) = \begin{pmatrix} zu \\ z(1-u) \end{pmatrix}, DT^{-1}(z, u) = \begin{pmatrix} u & (1-u) \\ z & -z \end{pmatrix}, |\det DT^{-1}(z, u)| = z$$

Dann ist mit Satz 7.1 und  $Z := X + Y, U := \frac{X}{X+Y}$  die Dichte von  $(Z, U)$ :

$$\begin{aligned} f_{(Z,U)} &= z \cdot \frac{a^{r+s}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} (zu)^{r-1} (z(1-u))^{s-1} e^{-az} \\ &= \underbrace{\frac{a^{r+s}}{\Gamma(r+s)} z^{r+s-1} e^{-az}}_{\text{Dichte der } \Gamma\text{-Verteilung}} \underbrace{\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} u^{r-1} (1-u)^{s-1}}_{\text{Dichte der } \mathcal{B}\text{-Verteilung}} \end{aligned}$$

### 7.2.2. Korollar:

- (i)  $X \sim \Gamma_{a,r}, Y \sim \Gamma_{a,s}$  unabhängig, so ist  $X + Y \sim \Gamma_{a,r+s}$ .
- (ii)  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.,  $\sim \mathcal{N}(0, 1)$ , so ist  $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{n}{2}}$  ( $\chi^2$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden,  $\chi_n^2$ -Verteilung).

### 7.2.3. Proposition: Fisher-Verteilung mit $m$ und $n$ Freiheitsgraden

Seien  $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$  unabhängig Standard-normalverteilt. Dann hat

$$F_{m,n} := \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j^2}$$

die Dichte

$$f_{m,n}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{\frac{(m+n)}{2}}}.$$

**Beweis:**

Sei  $X := \sum_{i=1}^m X_i^2 \sim \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{m}{2}}, Y := \sum_{j=1}^n Y_j^2 \sim \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{n}{2}}$  unabhängig, also ist  $U := \frac{X}{X+Y} \sim \mathcal{B}_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}}$ . Dann ist

$$F_{m,n} = \frac{nX}{mY} = \frac{n}{m} \frac{\frac{X}{X+Y}}{\frac{Y}{X+Y}} = \frac{n}{m} \frac{U}{1-U},$$

mit

$$T : (0, 1) \rightarrow (0, \infty), u \mapsto \frac{n}{m} \frac{u}{1-u}, T^{-1}(z) = \frac{mz}{n+ mz}, \frac{d}{dz} T^{-1}(z) = \frac{mnz}{(n+ mz)^2}$$

ist  $F_{m,n} = T(U)$ , hat also die Dichte

$$f_{m,n}(z) = \frac{mnz}{(n+ mz)^2} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \left( \frac{mz}{n+ mz} \right)^{\frac{m}{2}-1} \left( \frac{n}{n+ mz} \right)^{\frac{n}{2}-1}.$$

### 7.2.4. Korollar: Student'sches T

$X, Y_1, \dots, Y_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(0, 1)$ , dann hat

$$T := \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2}}$$

die Dichte

$$\tau_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Diese Verteilung heißt *Student'sche t-Verteilung mit n Freiheitsgraden, t<sub>n</sub>-Verteilung*

**Beweis:**

$T^2$  hat Dichte  $f_{1,n}$ ,

$$\varphi(z) = \sqrt{z}, \varphi^{-1}(y) = y^2, \frac{d}{dy} \varphi^{-1}(y) = 2y.$$

$|T|$  hat Dichte  $2tf_{1,n}(t^2)$ , da  $T$  symmetrisch um 0 verteilt ist, hat  $T$  die Dichte  $|t|f_{1,n}(t^2)$ .

### 7.3. Satz:

Seien  $X_1, \dots, X_n$  u.i.v.  $\sim \mathcal{N}(m, v)$ ,  $M := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $V^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ . Dann gilt:

- (i)  $M$  und  $V^*$  sind unabhängig,
- (ii)  $M \sim \mathcal{N}(m, \frac{v}{n})$ ,  $\frac{n-1}{v} V^* \sim \chi_{n-1}^2$ ,
- (iii)  $T := \frac{\sqrt{n}(M - m)}{\sqrt{V^*}}$  ist Student- $(n-1)$ -verteilt ( $\sim t_n$ ).

Sei

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

mit  $Z_1, \dots, Z_n$  unabhängig und  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Die Verteilung heißt die  $n$ -dimensionale Standardnormalverteilung mit Dichte

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Z_i^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \|z\|^2}$$

auf  $\mathbb{R}^n$ . Sei weiter  $O$  eine orthogonale  $(n \times n)$ -Matrix (d.h.  $O^T O = Id_n$ ). Dann ist  $Y := OZ$  wieder  $n$ -dimensional Standard-normalverteilt (wie man beispielsweise mit dem Dichtentransformationssatz sieht). Insbesondere sind die Koordinaten  $Y_1, \dots, Y_n$  unabhängig.

**Beweis:**

O.B.d.A.  $m = 0, v = 1$ , sonst gehe über zu  $X'_i = \frac{X_i - m}{\sqrt{v}}$ .

Sei

$$z_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix},$$

ergänze zu Orthonormalbasis  $z_1, \dots, z_n$  von  $\mathbb{R}^n$ . Sei weiter

$$O = \begin{pmatrix} z_1^t \\ z_2^t \\ \vdots \\ z_n^t \end{pmatrix} \text{ ist orthogonal, } Y = OX \quad \left( , X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \right),$$

$Y$  ist ebenfalls  $n$ -dimensional Standard-normalverteilt.

$$Y_1 = (OX)_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} X_i = \sqrt{n}M \text{ (insbesondere ist } M \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})\text{),}$$

$$(n-1)V^* = \sum_{i=1}^n (X_i - M)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i^2}_{=||X||^2 = ||Y||^2} - \underbrace{nM^2}_{=Y_1^2} = \sum_{i=2}^n Y_i^2 \sim \chi_{n-1}^2,$$

also ist  $(n-1)V^* \sim \chi^2$ -verteilt mit  $n-1$  Freiheitsgraden und unabhängig von  $Y_1$ .

## 8. Konfidenzintervalle für den Median

**Szenario:** Seien  $X_1, \dots, X_n$  u.i.v. reellwertig, mit (unbekannter) Verteilung  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}$  habe stetige Verteilungsfunktion.  $m(\mathbf{P})$  sei ein Median von  $\mathbf{P}$  (d.h.  $\mathbf{P}[(-\infty, m(\mathbf{P}))] = \frac{1}{2} = \mathbf{P}[[m(\mathbf{P}), \infty))$ ). Die zugehörige Ordnungsstatistik ist

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}.$$

**Bemerkung:**

Da  $\mathbf{P}$  stetige Verteilungsfunktion hat, gilt

$$\mathbf{P}^{\otimes n}[X_i = X_j] = 0 \text{ für } i \neq j.$$

**Beobachtung:**

$\mathbf{P}^{\otimes n}[X_{(k)} > m(\mathbf{P})] = \mathbf{P}^{\otimes n}[\{|\{1 \leq i \leq n : X_i \leq m(\mathbf{P})\}| \leq k-1\}] = \text{Bin}_{n, \frac{1}{2}}(\{0, \dots, k-1\})$ , analog:  
 $\mathbf{P}^{\otimes n}[X_{(n-k+1)} < m(\mathbf{P})] = \text{Bin}_{n, \frac{1}{2}}(\{n-k+1, \dots, n\})$

### 8.1. Satz über die Konfidenzintervalle für den Median

Zu  $\alpha \in (0, 1)$  wähle  $k$  maximal, so dass  $\text{Bin}_{n, \frac{1}{2}}(\{0, \dots, k-1\}) \leq \frac{\alpha}{2}$ , dann ist

$$[X_{(k)}, X_{(n-k+1)}]$$

ein Konfidenzintervall für den Median  $m(\mathbf{P})$  zum Irrtumsniveau  $\alpha$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\otimes n}[[X_{(k)}, X_{(n-k+1)}] \ni m(\mathbf{P})] &= \mathbf{P}^{\otimes n}[\{X_{(k)} > m(\mathbf{P})\} \cup \{X_{(n-k+1)} < m(\mathbf{P})\}] \\ &\leq \mathbf{P}^{\otimes n}[\{X_{(k)} > m(\mathbf{P})\}] + \mathbf{P}^{\otimes n}[\{X_{(n-k+1)} < m(\mathbf{P})\}] \\ &= 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha \end{aligned}$$

**Beobachtung: Konfidenzintervalle und Tests**

Sei  $C(X)$  ein Konfidenzbereich für  $\tau(\mathbf{P})$  zum Sicherheitsniveau  $1 - \alpha$ , d.h.

$$\mathbf{P}^{\otimes n}[\tau(\mathbf{P}) \in C(X)] \geq 1 - \alpha \quad \forall \mathbf{P} \text{ (aus einer gewissen Klasse).}$$

Betrachte die *Hypothese*  $H_0 : \tau(\mathbf{P}) = \tau_0$  und die *Alternative*  $H_1 : \tau(\mathbf{P}) \neq \tau_0$  und folgenden Test: Lehne  $H_0$  ab, wenn  $C(X) \ni \tau_0$ , sonst nehme  $H_0$  an.

Die „Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise anzulehnen“, ist

$$\sup_{\mathbf{P}:\tau(\mathbf{P})=\tau_0} \mathbf{P}[„lehne  $H_0$  ab“] = \sup_{\mathbf{P}:\tau(\mathbf{P})=\tau_0} \mathbf{P}[\tau(\mathbf{P}) \notin C(X)] = \sup_{\mathbf{P}:\tau(\mathbf{P})=\tau_0} \mathbf{P}[\tau_0 \notin C(X)] \leq \alpha.$$

Diese Größe nennt man (die Wahrscheinlichkeit eines) *Fehler(s) 1. Art*.

## 8.2. Korollar: Vorzeichentest für den Median

Seien  $X_1, \dots, X_n$  u.i.v. reellwertig, gemäß  $\mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}$  habe stetige Verteilungsfunktion),  $\alpha \in (0, 1)$ , wähle  $k$  maximal mit  $\text{Bin}_{n, \frac{1}{2}}(\{0, \dots, k-1\}) \leq \frac{\alpha}{2}$ , teste  $H_0 : m(\mathbf{P}) = m_0$  gegen  $H_1 : m(\mathbf{P}) \neq m_0$  folgendermaßen:

Wenn  $[X_{(k)}, X_{(n-k+1)}] \ni m_0$ , so nehme  $H_0$  an, sonst lehne  $H_0$  ab und nehme  $H_1$  an. Der Fehler 1. Art dieses Tests ist  $\leq \alpha$ .

Analog für  $H_0 : m(\mathbf{P}) \leq m_0$  gegen  $H_1 : m(\mathbf{P}) > m_0$ :

Wenn  $X_{(k')} > m_0$ , so lehne  $H_0$  ab, wo  $k'$  so gewählt ist, dass  $\text{Bin}_{n, \frac{1}{2}}(\{0, \dots, k'-1\}) \leq \alpha$  (und  $k'$  maximal mit dieser Eigenschaft).

## 8.3. Die 2-Stichproben-Situation:

### 8.3.1. Wilcoxon-Rangsummen-Test

Sei  $n = k + l$ ,  $X_1, \dots, X_k$  u.i.v. gemäß  $\mathbf{P}$  und  $X_{k+1}, \dots, X_{k+l}$  u.i.v. gemäß  $\mathbf{Q}$ , mit  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\mathbb{R}$  mit stetiger Verteilungsfunktion.

Wie kann man prüfen, ob unter  $\mathbf{P}$  „typischerweise kleinere Werte angenommen werden?“

$$R_i = |\{1 \leq j \leq n : X_j \leq X_i\}|,$$

Dann ist

$$W = \sum_{i=1}^k R_i \text{ die Wilcoxon-Rangsummen-Statistik.}$$

#### Beobachtung:

- $\sum_{i=1}^n R_i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $W = U + \frac{k(k+1)}{2}$ , wo  $U = U_{k,l} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{k+l} \mathbb{1}_{(X_i > X_j)}$

O.B.d.A. nehme an, dass  $X_1 < \dots < X_k$  (denn  $U, W$  invariant unter Permutation von  $X_1, \dots, X_k$ ), dann ist

$$R_i = i + \sum_{j=k+1}^{k+l} \mathbb{1}_{(X_i > X_j)}.$$

### 8.3.2. Proposition:

Sei  $\mathbf{P}$  stetige Verteilung auf  $\mathbb{R}$ ,  $n = k + l$ ,  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d gemäß  $\mathbf{P}$ ,  $U$  wie oben. Dann gilt für  $m \in \{0, 1, \dots, k \cdot l\}$ :

$$\mathbf{P}^{\otimes n}[U = m] = \frac{1}{\binom{n}{k}} \cdot N(m; k, l),$$

wobei

$$N(m; k, l) = \left| \left\{ (m_1, \dots, m_k) \in \{0, 1, \dots, l\}^k : m_1 \leq \dots \leq m_k, \sum_{i=1}^k m_i = m \right\} \right|.$$

**Bemerkung:**

$U$  ist also „verteilungsfrei“ in dem Sinn, dass seine Verteilung nicht von  $\mathbf{P}$  abhängt (die Gewichte sind „rein kombinatorische“ Terme).

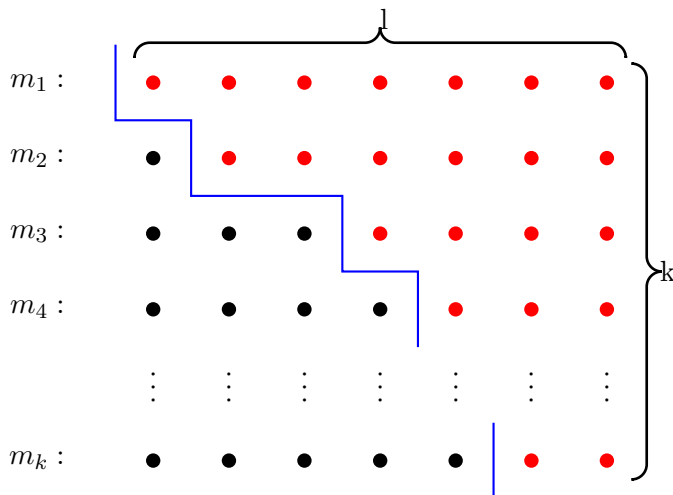


Abbildung 8.1.: Darstellung der kombinatorischen Größe  $N(m; k, l)$ , als Anzahl der Wege durch dieses  $k \times l$ -Gitter, so dass unter dem Weg nur  $m = \sum m_i$  viele Punkte liegen

Es gilt

$$N(m; k, l) = N(m; l, k) = N(kl - m; k, l) \text{ und } N(m; k, l) = \sum_{j=0}^k N(m - j; j, l - 1).$$

Für die erste Gleichung vertausche Zeilen und Spalten in Abb. 8.1, für die zweite Gleichung vertausche die Rollen von „rot“ und „schwarz“ (und dann Zeilen und Spalten) in Abb. 8.1, die dritte Gleichung ergibt sich durch Zerlegung nach der Anzahl schwarzer Punkte in der ersten Spalte.

**Beweis:**

$(R_1, \dots, R_n)$  ist unter  $\mathbf{P}^{\otimes n}$  uniform verteilt auf allen Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$ , denn

$$\mathbf{P}^{\otimes n}[X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \dots < X_{\sigma(n)}] = \frac{1}{n!}.$$

Demnach ist  $\{R_1, \dots, R_k\}$  uniform verteilt auf den  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ . Parametrisiere  $A \subseteq \{1, \dots, n\}$  mit  $|A| = k$  als  $(r_1, \dots, r_k), 1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$ . Dann ist

$$(m_1, \dots, m_k)(A) := (r_1 - 1, r_2 - 2, \dots, r_k - k) \in \{0, 1, \dots, l\}^k,$$

$$m_i(A) = |\{s \in \{1, \dots, n\} \setminus A : s < r_i\}|.$$

Somit

$$\mathbf{P}^{\otimes n}[U = m] = \sum_{\substack{A \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |A|=k \\ m_1(A) + \dots + m_k(A) = m}} \underbrace{\mathbf{P}^{\otimes n}[\{R_1, \dots, R_k\} = A]}_{= \frac{1}{\binom{n}{k}}}.$$

Ohne Einschränkung seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig  $\sim \text{unif}([0, 1])$  ( $n = k + l$ ),

$$U_{k,l} := \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{k+l} \mathbb{1}_{X_i > X_j}.$$

Es gilt  $\mathbf{E}[U_{k,l}] = \frac{1}{2}kl$ ,

$$\begin{aligned} \text{Var}(U_{k,l}) &= \text{Cov}(U_{k,l}, U_{k,l}) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{k+l} \sum_{i'=1}^k \sum_{j'=k+1}^{k+l} \text{Cov}(\mathbb{1}_{(X_i > X_j)}, \mathbb{1}_{(X_{i'} < X_{j'})}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot kl + \frac{1}{12}kl(l-1) + \frac{1}{12}lk(k-1) \\ &= \frac{kl(k+l+1)}{12} =: V_{k,l}. \end{aligned}$$

#### 8.4. Satz:

$$U_{k,l}^* := \frac{U_{k,l} - \frac{1}{2}kl}{\sqrt{V_{k,l}}} \xrightarrow[k, l \rightarrow \infty]{\text{in Vert.}} \mathcal{N}(0, 1)$$

**Beweis:**

Idee: Approximiere  $\mathbb{1}_{X_i > X_j} - \frac{1}{2}$  durch  $X_i - X_j$ . Definiere weiter

$$Z_{k,l} := \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{k+l} (X_i - X_j) = l \sum_{i=1}^k X_i - k \sum_{j=k+1}^{k+l} X_j.$$

Dann ist

$$\mathbf{E}[Z_{k,l}] = 0 \text{ und } \text{Var}(Z_{k,l}) = l^2k \frac{1}{12} + k^2l \frac{1}{12} = \frac{kl(k+l)}{12}.$$

---

1

$$\text{Cov}(\mathbb{1}_{(X_i > X_j)}, \mathbb{1}_{(X_{i'} < X_{j'})}) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \neq i' \text{ und } j \neq j' \\ \mathbf{P}[X_1 > X_2, X_1 > X_3] - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} & \text{wenn } i = i' \text{ und } j \neq j' \text{ oder } i \neq i' \text{ und } j = j' \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} & \text{wenn } i = i' \text{ und } j = j' \end{cases}$$



Sei nun  $Z_{k,l}^* := \frac{Z_{k,l}}{\sqrt{V_{k,l}}}$ . Wir wollen dann noch zeigen, dass  $\text{Var}(U_{k,l}^* - Z_{k,l}^*) \xrightarrow{k,l \rightarrow \infty} 0$ :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U_{k,l}, Z_{k,l}) &= l \sum_{i=1}^k \text{Cov}(U_{k,l}, X_i) - k \sum_{j=k+1}^{k+l} \text{Cov}(U_{k,l}, X_j), \\ \text{Cov}(U_{k,l}, X_i) &= \sum_{i'=1}^k \sum_{j'=k+1}^{k+l} \underbrace{\text{Cov}(\mathbb{1}_{X_{i'} > X_{j'}}, X_i)}_{\substack{\text{für } i \neq i' \\ = 0 \\ \text{falls } i = i' \\ = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{x_1 > x_2} x_1 dx_2 dx_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}}} \\ &= l \frac{1}{12}, \\ \text{Cov}(U_{k,l}, X_i) &= -\frac{k}{12} \text{ analog.} \end{aligned}$$

Also  $\text{Cov}(U_{k,l}, Z_{k,l}) = \frac{kl(k+l)}{12}$ , somit

$$\begin{aligned} \text{Var}(U_{k,l} - Z_{k,l}) &= \text{Var}(U_{k,l}) - 2\text{Cov}(U_{k,l}, Z_{k,l}) + \text{Var}(Z_{k,l}) = \frac{kl}{12} \\ \text{und } \text{Var}(U_{k,l}^* - Z_{k,l}^*) &= \frac{1}{k+l+1} \xrightarrow{k,l \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

$$Z_{k,l}^* = \sqrt{\underbrace{\frac{l}{k+l+1}}_{=: a_{k,l}}} \cdot S_k^* - \sqrt{\underbrace{\frac{k}{k+l+1}}_{=: b_{k,l}}} T_l^*$$

$$\text{mit } S_k^* = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{12}}} \sum_{i=1}^k (X_i - \frac{1}{2}), T_l^* = \frac{1}{\sqrt{\frac{l}{12}}} \sum_{j=k+1}^{k+l} (X_j - \frac{1}{2}).$$

Nach ZGWS:

$$(S_k^*, T_l^*) \xrightarrow[k,l \rightarrow \infty]{\text{in Vert.}} (S, T), \text{ mit } S, T \text{ unabhängig und } \mathcal{N}(0, 1) \text{ verteilt.}$$

Sei  $(k_i, l_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $k_i \rightarrow \infty, l_i \rightarrow \infty$ , dann gibt es eine Teilfolge  $(k_{i_j}, l_{i_j})$ , sodass  $a_{k_{i_j}, l_{i_j}} \rightarrow a$  und  $b_{k_{i_j}, l_{i_j}} \rightarrow b$  und  $a + b = 1$ .

$$\text{Demnach } Z_{k_{i_j}, l_{i_j}}^* \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{\text{in Vert.}} \underbrace{\sqrt{a}S}_{\sim \mathcal{N}(0, a)} + \underbrace{\sqrt{b}T}_{\sim \mathcal{N}(0, b)} \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{a+b}_{=1}).$$

## 8.5. Definition: stochastisch kleiner

Seien  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\mathbb{R}$ , so heißt  $\mathbf{P}$  *stochastisch kleiner* als  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{P} \preceq \mathbf{Q}$ , wenn

$$\mathbf{P}[[c, \infty)] \leq \mathbf{Q}[[c, \infty)] \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

d.h. für die zugehörigen Verteilungsfunktionen gilt  $F_{\mathbf{P}} \geq F_{\mathbf{Q}}$ .

**Bemerkung:**

$\mathbf{P} \preceq \mathbf{Q} \iff \exists$  Zufallsvariablen  $X, Y$  (auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ) mit  $X \leq Y$   $\mathbf{P}$ -f.s.,  $\mathbf{P} \circ X^{-1} = \mathbf{P}$  und  $\mathbf{P} \circ Y^{-1} = \mathbf{Q}$ .

**Beweis der Bemerkung:**

„ $\Leftarrow$ “:  $\mathbf{P}[[c, \infty]] = \mathbf{P}[X \geq c] \leq \mathbf{P}[Y \geq c] = \mathbf{Q}[[c, \infty]]$   
„ $\Rightarrow$ “: Sei  $F_{\mathbf{P}}^{-1}(u) := \inf\{x : F_{\mathbf{P}}(x) \geq u\}$  und analog  $F_{\mathbf{Q}}^{-1}$ . Sei weiter  $U$  uniform auf  $[0, 1]$ ,  
 $X := F_{\mathbf{P}}^{-1}(U) \leq Y := F_{\mathbf{Q}}^{-1}(U)$ , denn  $F_{\mathbf{P}}^{-1}(u) \leq F_{\mathbf{Q}}^{-1}(u)$ .

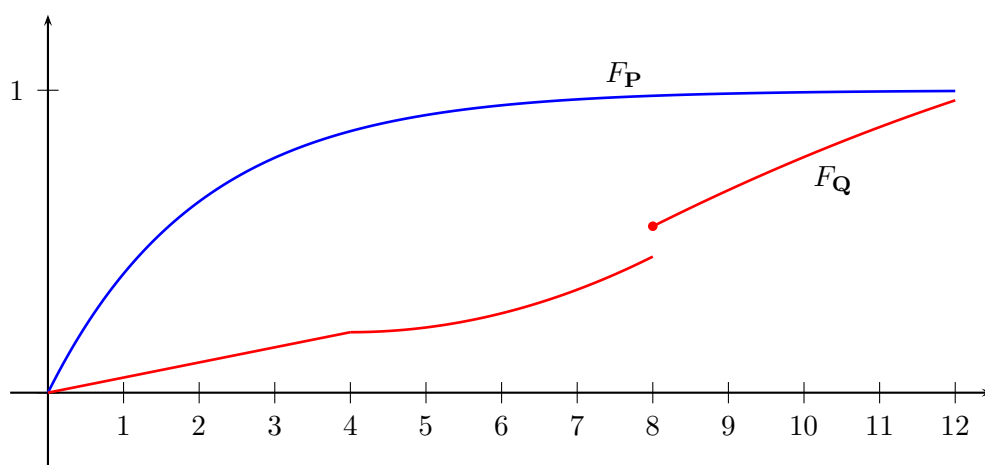


Abbildung 8.2.: Darstellung der Verteilungsfunktionen von  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$ , wenn  $\mathbf{P} \preceq \mathbf{Q}$

**Bemerkung:**

$X \sim \mathbf{P}, c > 0, X + c \sim \mathbf{Q}$ , dann ist  $\mathbf{P} \preceq \mathbf{Q}$ , insbesondere ist  $\mathcal{N}(m_1, v) \preceq \mathcal{N}(m_2, v)$ , wenn  $m_1 \leq m_2$ .

**8.5.1. Satz:**

Sei  $n = k + l$ ,  $X_1, \dots, X_k$  i.i.d. gemäß  $\mathbf{Q}_1$  und  $X_{k+1}, \dots, X_{k+l}$  i.i.d. gemäß  $\mathbf{Q}_2$ ,  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$  stetige Verteilungen auf  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Bestimme  $c$  so, dass

$$\mathbf{P}[U_{k,l} \leq c] \leq \alpha.$$

Test: Berechne  $U_{k,l}$  anhand der Daten und lehne  $H_0: \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$  ab, wenn  $U_{k,l} \leq c$  zugunsten der Alternative  $H_1: \mathbf{Q}_1 \preceq \mathbf{Q}_2$ , sonst nehme  $H_0$  an.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art (d.h.  $H_0$  fälschlicherweise anzulehnen)  $\leq \alpha$ . (Dies ist ein Test von  $H_0$  gegen  $H_1$  zum Niveau  $\alpha$ .)

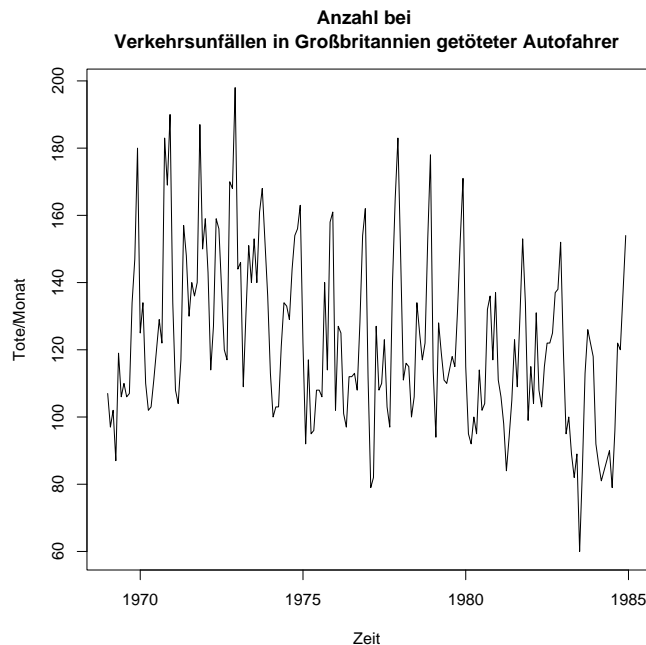
## 8.5.2. Beispiel: Verkehrstote in Großbritannien 1969–1984

Der mit R mitgelieferte Datensatz `Seatbelts`<sup>2</sup> enthält (u.A.) für jeden Monat im Zeitraum Januar 1969 bis Dezember 1984 die Anzahl bei Verkehrsunfällen in Großbritannien getöteten Autofahrer.

```
R version 2.4.0 Patched (2006-11-25 r39997)
Copyright (C) 2006 The R Foundation for Statistical Computing
ISBN 3-900051-07-0
```

...

```
> data(Seatbelts)
> plot(Seatbelts[,1], xlab="Zeit", ylab="Tote/Monat",main="Anzahl bei
Verkehrsunfällen in Großbritannien getöteter Autofahrer")
```



Am 31. Januar 1983 wurde in Großbritannien die Gurtpflicht eingeführt, wir spalten die Daten entsprechend:

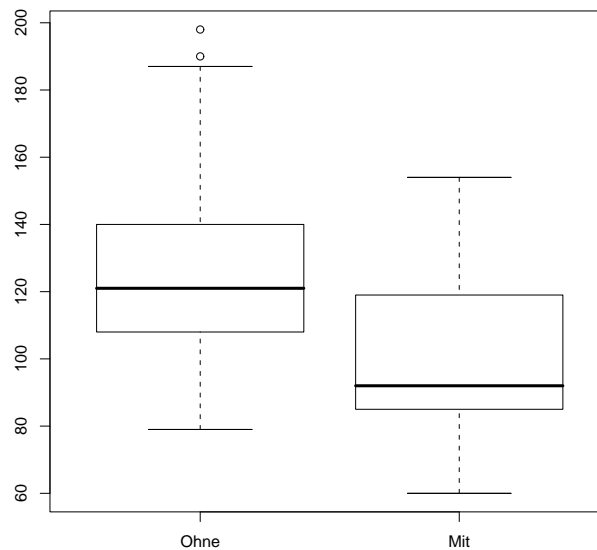
```
> A<-Seatbelts[Seatbelts[,8]==0,1]
> B<-Seatbelts[Seatbelts[,8]==1,1]
(Seatbelts[,8] ist 0, wenn im betreffenden Monat keine Gurtpflicht galt, A enthält nun die
Monate ohne Gurtpflicht, B die mit.)
```

Ein Boxplot zeigt, dass die Werte in A tendenziell größer als die in B sind:

```
> boxplot(list("Ohne"=A, "Mit"=B))
```

---

<sup>2</sup>Basierend auf A. C. Harvey and J. Durbin, The effects of seat belt legislation on British road casualties: A case study in structural time series modelling, *J. Roy. Stat. Soc. B* **149**, 187–227 (1986).



Ein Rangsummen-Test zeigt, dass die Werte in A tatsächlich signifikant kleiner sind als die in B:

```
> wilcox.test(B,A,alt="less")
```

Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data: B and A

W = 829, p-value = 4.171e-06

alternative hypothesis: true location shift is less than 0

**Bemerkung: „Machtlosigkeit“ des Rangsummentests gegen unterschiedliche Varianzen**

Zur Illustration simulieren wir 100  $\mathcal{N}(0,1)$ - und 100  $\mathcal{N}(0,2)$ -verteilte Werte. Obwohl diese Verteilungen deutlich verschieden sind, schlägt der Rangsummentest hier typischerweise nicht an:

```
> C<-rnorm(100,mean=0,sd=1)
> D<-rnorm(100,mean=0,sd=sqrt(2))
> wilcox.test(C,D)
```

Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data: C and D

W = 5066, p-value = 0.8728

alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0

## 9. Testen von Hypothesen:

### 9.1. Definition: Test, Randomisierung und Gütefunktion

Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$  ein statistisches Modell,  $\Theta = \Theta_0 \dot{\cup} \Theta_1$  (Zerlegung in „Nullhypothese“ und „Alternative“).

Eine Statistik  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$  (interpretiert als Entscheidungsregel: Bei gegebener Beobachtung  $x$  entscheide mit Wahrscheinlichkeit  $\varphi(x)$  für die Alternative) heißt ein *Test* von  $\Theta_0$  gegen  $\Theta_1$ .

Der Test heißt *randomisiert*, wenn  $\varphi(X) \not\subseteq \{0, 1\}$ , sonst *nicht-randomisiert*.

Für nicht randomisierte Test heißt

$$\{x : \varphi(x) = 1\} \text{ der Ablehnungs- oder Verwerfungsbereich.}$$

Weiter heißt

$$G_\varphi(\vartheta) = \mathbf{E}_\vartheta[\varphi] \text{ die Gütefunktion von } \varphi,$$

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_0} G_\varphi(\vartheta)$$

heißt *Umfang* oder *effektives Niveau* von  $\varphi$ .  $\varphi$  heißt ein Test zum Irrtumsniveau  $\alpha \in (0, 1)$ , wenn  $\sup_{\vartheta \in \Theta_0} G_\varphi(\vartheta) \leq \alpha$ . Für  $\vartheta \in \Theta_1$  heißt  $G_\varphi(\vartheta)$  die *Macht* oder *Schärfe* von  $\varphi$  (engl. „Power“) bei  $\vartheta$ .

### 9.2. Definition: gleichmäßig bester Test

Ein Test von  $\Theta_0$  gegen  $\Theta_1$  heißt ein *gleichmäßig bester Test* zum Niveau  $\alpha \in (0, 1)$ , wenn er das Niveau  $\alpha$  einhält, d.h.

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_0} G_\varphi(\vartheta) \leq \alpha,$$

und für jeden Test  $\psi$ , der das Niveau  $\alpha$  einhält,

$$G_\varphi(\vartheta) \geq G_\psi(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta_1$$

gilt.

### 9.3. Alternativtest und das Neyman-Pearson-Lemma

Betrachte ein Standardmodell,  $\Theta = \{0, 1\}$ , d.h.

$$\mathbf{P}_0[dx] = \rho(x, 0)dx, \quad \mathbf{P}_1[dx] = \rho(x, 1) dx$$

(bzw. analog für  $\mathcal{X}$  diskret). Setze

$$R(x) := \begin{cases} \frac{\rho(x, 1)}{\rho(x, 0)} & \text{wenn } \rho(x, 0) > 0, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

$R$  heißt *Likelihood-Quotient*.

### 9.3.1. Definition: Neyman-Pearson-Test

Ein Test  $\varphi$  von  $\mathbf{P}_0$  gegen  $\mathbf{P}_1$  der Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } R(x) > c, \\ 0 & \text{für } R(x) < c, \end{cases}$$

heißt ein *Neyman-Pearson-Test*.

### 9.3.2. Satz: (Neyman-Pearson-Lemma)

Betrachte Standardmodell mit einpunktiger Nullhypothese und einpunktiger Alternative,  $\alpha \in (0, 1)$ .

- (i) Es gibt einen Neyman-Pearson-Test  $\varphi$  mit  $\mathbf{E}_0[\varphi] = \alpha$ .
- (ii) Jeder Neyman-Pearson-Test  $\varphi$  mit  $\mathbf{E}_0[\varphi] = \alpha$  ist ein gleichmäßig bester Test zum Niveau  $\alpha$ , und jeder gleichmäßig beste Test zum Niveau  $\alpha$  ist ununterscheidbar von einem (gewissen) Neyman-Pearson-Test.

**Beweis:**

- (i) Wähle  $c$  mit  $\mathbf{P}_0[R \geq c] \geq \alpha$  und  $\mathbf{P}_0[R \leq c] \geq 1 - \alpha$

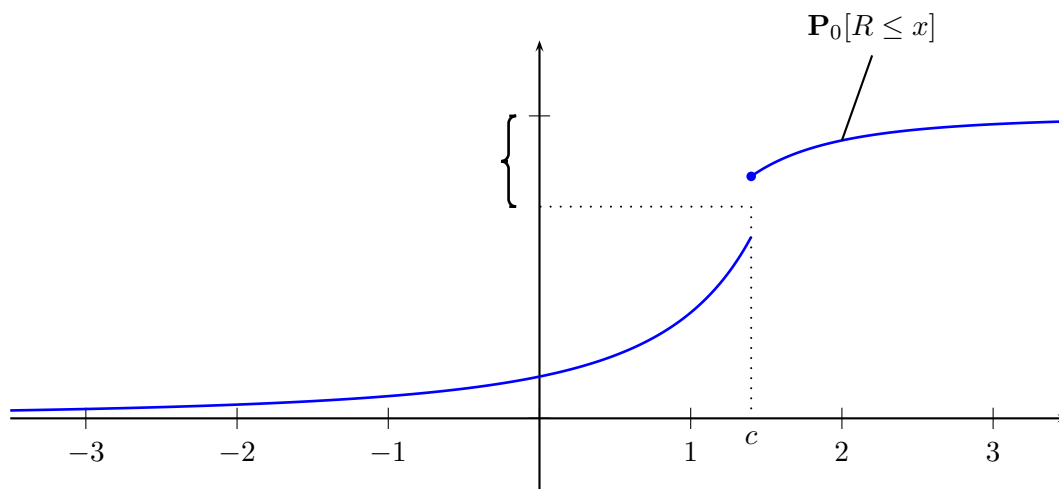


Abbildung 9.1.: Abbildung zur Wahl von  $c$ , falls die Verteilungsfunktion gerade an dieser Stelle einen Sprung hat. Deswegen kann es in manchen Fällen auch sinnvoll sein, den Test zu randomisieren.

Falls  $\mathbf{P}_0[R = c] = 0$ , so ist  $\varphi = \mathbb{1}_{R(x) > c}$  ein Neyman-Pearson-Test mit  $\mathbf{E}_0[\varphi] = \alpha$  wie gewünscht.

Falls  $\mathbf{P}_0[R = c] > 0$ , setze  $\gamma := \frac{\alpha - \mathbf{P}_0[R > c]}{\mathbf{P}_0[R = c]} \in [0, 1]$  und

$$\varphi := \begin{cases} 1 & \text{wenn } R(x) > c, \\ \gamma & \text{wenn } R(x) = c, \\ 0 & \text{wenn } R(x) < c, \end{cases}$$

denn  $\mathbf{P}_0[R > c] = 1 - \mathbf{P}_0[R \leq c] \leq \alpha$  und  
 $\mathbf{P}_0[R = c] = \mathbf{P}_0[R \geq c] - \mathbf{P}_0[R > c] \geq \alpha - \mathbf{P}_0[R > c]$ .

Dies ist ein Neyman-Pearson-Test mit

$$\mathbf{E}_0[\varphi] = 1 \cdot \mathbf{P}_0[R > c] + \gamma \mathbf{P}_0[R = c] + 0 \cdot \mathbf{P}_0[R < c] = \alpha.$$

- (ii) Sei  $\varphi$  ein Neyman-Pearson-Test (mit Schwellenwert  $c$ ) mit  $\mathbf{E}_0[\varphi] = \alpha$ ,  $\psi$  irgendein Test mit  $\mathbf{E}_0[\psi] = \alpha$ . Es gilt

$$\forall x : (\varphi(x) - \psi(x))(\rho(x, 1) - c\rho(x, 0)) \geq 0,$$

denn die beiden Faktoren haben dasselbe Vorzeichen (sofern der zweite  $\neq 0$ ):

$\varphi(x) \geq \mathbf{1}(\rho(x, 1) > c\rho(x, 0))$ , also

$$(**) \quad f_1(x) := (\varphi(x) - \psi(x))\rho(x, 1) \geq c(\varphi(x) - \psi(x))\rho(x, 0) =: cf_0(x),$$

und demnach

$$(*) \quad \mathbf{E}_1[\varphi] - \mathbf{E}_1[\psi] = \int_{\mathcal{X}} f_1(x) dx \geq c \int_{\mathcal{X}} f_0(x) dx = c(\alpha - \mathbf{E}_0[\psi]) \geq 0$$

Also ist die Macht von  $\varphi$  größergleich der von  $\psi$ .

Sei  $\psi$  ebenfalls ein bester Test mit  $\mathbf{E}_0[\psi] = \alpha$ , dann gilt Gleichheit in (\*), folglich gilt Gleichheit in (\*\*) (unter Umständen bis auf  $x$  aus eine Lebesgue-Nullmenge  $N$ ), d.h.

$$(\varphi(x) - \psi(x)) \cdot (\rho(x, 1) - c\rho(x, 0)) = 0,$$

d.h.  $\varphi = \psi$  für  $x \notin N$  mit  $R(x) \neq c$ . In diesem Sinne sind die beiden Tests ununterscheidbar.

## 9.4. Satz: (Lemma von Stein)

Im unendlichen Produktmodell  $(\mathcal{X}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}^{\otimes \mathbb{N}}, \mathbf{P}_{\vartheta}^{\otimes \mathbb{N}} : \vartheta \in \{0, 1\})$ , sei  $\varphi_n$  ein Neyman-Pearson-Test mit  $\mathbf{E}_0[\varphi_n] = \alpha$ , der nur von den Beobachtungen  $X_1, \dots, X_n$  abhängt. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - \mathbf{E}_1[\varphi_n]) = -H(\mathbf{P}_0 | \mathbf{P}_1),$$

d.h.  $\mathbf{E}[\varphi_n] \approx 1 - e^{-nH(\mathbf{P}_0 | \mathbf{P}_1)}$ , die Macht von  $\varphi$  konvergiert exponentiell schnell gegen 1.

**Beweis:**

Sei

$$R_n := \frac{\rho_1^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n)}{\rho_0^{\otimes n}(X_1, \dots, X_n)} = \prod_{i=1}^n \frac{\rho_1(X_i)}{\rho_0(X_i)},$$

$$h_n := -\frac{1}{n} \log R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i),$$

<sup>1</sup>Im Diskreten statt Integral natürlich eine Summe.

wo  $h(x) = \log \left( \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)} \right)$ . Dabei bemerken wir, dass

$$\mathbf{E}_0[h(X_1)] = H(\mathbf{P}_0|\mathbf{P}_1).$$

Dann ist

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } h_n < a_n \\ 0 & \text{wenn } h_n > a_n \end{cases}$$

für ein  $a_n$ . Sei  $a < \mathbf{E}_0[h]$ ,

$$\mathbf{P}_0^{\otimes n}[h_n \leq a] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ mit dem Gesetz großer Zahlen,}$$

also  $a_n > a$  für  $n$  genügend groß,

$$\{1 - \varphi_n > 0\} \subseteq \{h_n \geq a_n\} = \{\rho_0^{\otimes n} \geq e^{na_n} \rho_1^{\otimes n}\}$$

Somit

$$1 \geq \mathbf{E}_0[1 - \varphi_n] \geq e^{na_n} \mathbf{E}_1[1 - \varphi_n],$$

d.h.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - \mathbf{E}_1[\varphi_n]) \leq -a,$$

also auch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - \mathbf{E}_1[\varphi_n]) \leq -\mathbf{E}_0[h].$$

Sei  $a > \mathbf{E}_0[h]$  (und ohne Einschränkung  $\mathbf{E}_0[h] < \infty$ ), dann ist

$$\mathbf{P}_0^{\otimes n}[\rho_1^{\otimes n} \geq e^{-na} \rho_0^{\otimes n}] = \mathbf{P}_0^{\otimes n}[h_n \leq a] \geq \frac{1 + \alpha}{2}$$

für  $n$  genügend groß.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1[1 - \varphi_n] &= \mathbf{E}_0[(1 - \varphi_n) \frac{\rho_1^{\otimes n}}{\rho_0^{\otimes n}}] \\ &\geq e^{-na} \mathbf{E}_0[(1 - \varphi_n) \mathbf{1}_{h_n \leq a}] \\ &\geq e^{-na} (\mathbf{P}_0^{\otimes n}[h_n \leq a] - \underbrace{\mathbf{E}_0[\varphi_n]}_{=\alpha}) \\ &\geq e^{-na} \frac{1 - \alpha}{2} \end{aligned}$$

Somit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{E}_1[1 - \varphi_n] \geq -a,$$

mit  $a \searrow \mathbf{E}_0[h]$  folgt die Behauptung.

□



### 9.4.1. Beispiel:

Gegeben:  $X_1, \dots, X_n$ ,  $\mathbf{P}_0 = \mathcal{N}^{\otimes n}(m_0, v)$ ,  $\mathbf{P}_1 = \mathcal{N}^{\otimes n}(m_1, v)$ ,  $v > 0$  fest, o.B.d.A.  $m_0 < m_1$ .  
Teste  $H_0 : m = m_0$  gegen  $H_1 : m = m_1$ .

Sei

$$R_n = \exp \left( -\frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (X_i - m_1)^2 + \frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (X_i - m_0)^2 \right) = \exp \left( -\frac{n}{2v} (2(m_1 - m_0) \underbrace{M_n}_{=:\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} + m_1^2 - m_0^2) \right)$$

Betrachte nun

$$h_n = -\frac{1}{n} \log R_n = \frac{m_0 - m_1}{v} M_n - \frac{m_1^2 - m_0^2}{2v}.$$

Für  $\alpha \in (0, 1)$  wähle  $a_n$  so, dass  $\mathbf{P}_0[h_n < a_n] = \alpha$ , also

$$a_n = \frac{m_0 - m_1}{v} \left( \sqrt{\frac{n}{v}} \Phi^{-1}(1 - \alpha) + \frac{m_1^2 - m_0^2}{2(m_0 - m_1)} + m_0 \right).$$



# 10. Monotone Likelihood-Quotienten und beste einseitige Tests

## 10.1. Definition: Likelihood-Quotient $R_{\vartheta', \vartheta}(x)$

Ein Standardmodell  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P}_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta)$  mit  $\Theta \subseteq \mathbb{R}$  hat wachsende Likelihood-Quotienten (bzgl. einer reellwertigen Statistik  $T$ ), wenn für alle  $\vartheta < \vartheta'$  der Likelihood-Quotient

$$R_{\vartheta', \vartheta}(x) := \frac{\rho_{\vartheta'}(x)}{\rho_{\vartheta}(x)}$$

eine wachsende Funktion von  $T$  ist, d.h.  $R_{\vartheta', \vartheta}(x) = f_{\vartheta', \vartheta}(T(x)) = (f_{\vartheta', \vartheta} \circ T)(x)$  für eine wachsende Funktion  $f_{\vartheta', \vartheta}$ .

### 10.1.1. Beobachtung:

Jedes einparametrische exponentielle Modell hat wachsende Likelihood-Quotienten:

$$\rho(x, \vartheta) = h(x)e^{a(\vartheta)T(x) - b(\vartheta)}$$

mit  $a$  strikt wachsend oder strikt fallend, demnach

$$R_{\vartheta', \vartheta}(x) = \frac{\rho_{\vartheta'}(x)}{\rho_{\vartheta}(x)} = \exp((a(\vartheta') - a(\vartheta)T(x) - b(\vartheta') + b(\vartheta))).$$

Klar, falls  $a$  streng monoton wachsend, sonst gehe zu  $-T$  über.

## 10.2. Satz:

Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P}_{\vartheta} : \vartheta \in \Theta)$ ,  $\Theta \subseteq \mathbb{R}$  ein Standardmodell mit wachsenden Likelihoodquotienten bzgl.  $T$ ,  $\vartheta_0 \in \Theta$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Ein gleichmäßig bester Test von  $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$  gegen  $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$  zum Niveau  $\alpha$  hat die Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \iff T(x) > c \\ \gamma & \iff T(x) = c \\ 0 & \iff T(x) < c \end{cases}$$

für gewisse  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ , die durch die Bedingung  $G_{\varphi}(\vartheta_0) = \alpha$  festgelegt sind. Die Gütefunktion ist monoton wachsend in  $\vartheta$ .

### Bemerkung:

Um  $H_0 : \vartheta \geq \vartheta_0$  gegen  $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$  zu testen, vertausche „<“ und „>“ der Definition von  $\varphi$  (formal: multipliziere  $\vartheta$  und  $T$  jeweils mit  $-1$ ).

**Beweis:**

Setze  $\Theta_0 := \Theta \cap (-\infty, \vartheta_0]$ ,  $\Theta_1 := \Theta \cap (\vartheta_0, \infty)$ . Sei  $\psi$  irgendein Test von  $H_0$  gegen  $H_1$  der das Niveau  $\alpha$  einhält, d.h.  $\sup_{\vartheta \in \Theta_0} G_\psi(\vartheta) \leq \alpha$ ,  $\vartheta' \in \Theta_1$ . Fasse  $\varphi$  und  $\psi$  auf als Tests von  $\{\vartheta_0\}$  gegen  $\{\vartheta'\}$ ; in diesem Szenario ist dann  $\varphi$  ein Neyman-Pearson-Test mit  $\mathbf{E}_{\vartheta_0}[\varphi] = \alpha$ .

Demnach

$$G_\varphi(\vartheta') \geq G_\psi(\vartheta') \quad \forall \vartheta' \in \Theta_1.$$

Zur Monotonie: Sei  $\vartheta < \vartheta'$ , fasse  $\varphi$  auf als einen (Neyman-Pearson-)Test von  $\{\vartheta\}$  gegen  $\{\vartheta'\}$  mit Niveau  $\beta := G_\varphi(\vartheta)$ .

Vergleiche mit dem (trivialen) Test  $\psi_\beta(x) \equiv \beta$ , der ebenfalls Niveau  $\beta$  hat.

Gemäß dem Neyman-Pearson-Lemma ist  $G_\varphi(\vartheta') \geq G_{\psi_\beta}(\vartheta') = \beta = G_\varphi(\vartheta)$ , insbesondere ist  $\vartheta \mapsto G_\varphi(\vartheta)$  monoton wachsend, also

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_0} G_\varphi(\vartheta) \stackrel{(<)}{=} \alpha.$$

□

**10.2.1. Beispiel:**

- (i) Sei  $X_1, \dots, X_n$  u.i.v gemäß  $\mathcal{N}(\vartheta, v)$ ,  $v > 0$  fest,  $\vartheta \in \mathbb{R}$ . Teste  $\{\vartheta \leq m_0\}$  gegen  $\{\vartheta > m_0\}$  folgendermaßen:

Dies ist ein exponentielles Modell bzgl.  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Der beste Test zum Niveau  $\alpha$  hat Ablehnungsbereich

$$\left\{ M_n > m_0 + \sqrt{\frac{v}{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha) \right\}.$$

- (ii) Sei  $X_1, \dots, X_n$  u.i.v gemäß  $\mathcal{N}(m, \vartheta)$ ,  $m$  fest,  $\vartheta > 0$ . Teste  $\{\vartheta \geq \vartheta_0\}$  gegen  $\{\vartheta < \vartheta_0\}$ : Dies ist eine exponentielle Familie bzgl.  $T := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$ , der beste Test zum Niveau  $\alpha$  hat dann den Ablehnungsbereich

$$\left\{ T < \frac{1}{n} \vartheta_0 \cdot \chi_{n,\alpha}^2 \right\},$$

wobei  $\chi_{n,\alpha}^2$  das  $\alpha$ -Quantil von  $\chi_n^2$ .

**10.3. Tests im (2-parametrischen) Gauß'schen Modell**

**Szenario:** Sei  $(m, v) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ ,  $(X_1, \dots, X_n) \sim \underbrace{\mathcal{N}(m, v)^{\otimes n}}_{=\mathbf{P}(m,v)}$ ,  $M_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

**Beobachtung**

$$\frac{1}{v} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 \text{ ist unter } \mathbf{P}_{(m,v)} \chi_{n-1}^2\text{-verteilt.}$$

### 10.3.1. Satz: Linksseitiger $\chi^2$ -Test für die Varianz im Gauß'schen Modell

Der Test  $\varphi$  mit Ablehnungsbereich<sup>1</sup>

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 > v_0 \chi_{n-1, 1-\alpha}^2 \right\}$$

ist ein gleichmäßig bester Test von  $H_0 : v \leq v_0$  gegen  $H_1 : v > v_0$  zum Niveau  $\alpha$ , wobei  $\chi_{n-1, 1-\alpha}^2 = (1 - \alpha)$ -Quantil von  $\chi_{n-1}^2$ .

D.h.

$$(*) \quad \mathbf{E}_{(m,v)}[\varphi] \leq \alpha \quad \forall (m,v) \in \Theta_0$$

und für jeden Test  $\psi$ , der auch Niveau  $\alpha$  einhält, gilt

$$\mathbf{E}_{(m,v)}[\varphi] \geq \mathbf{E}_{(m,v)}[\psi] \quad \forall (m,v) \in \Theta_1.$$

**Beweis:**

Zu (\*):

$$\mathbf{P}_{(m,v)}[\varphi = 1] = \mathbf{P}_{(m,v)} \left[ \frac{1}{v} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 > \frac{v_0}{v} \chi_{n-1, 1-\alpha}^2 \right] \leq \alpha \quad \forall (m,v) \in \Theta_0.$$

Fixiere  $(m_1, v_1) \in \Theta_1$ , für  $v \in (0, v_1]$  sei

$$\bar{\mathbf{P}}_v := \int \mathbf{P}_{(m,v)} w_v(dm)$$

mit  $w_v = \mathcal{N}(m_1, \frac{v_1-v}{n})^2$ ,  $\bar{\mathbf{P}}_{v_1} = \mathbf{P}_{(m_1, v_1)}$ .

Die Likelihood-Funktion ist

$$\begin{aligned} \bar{p}_v(X_1, \dots, X_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi v)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2} \cdot \left( 2\pi \frac{v_1 - v}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(m - m_1)^2}{2(v_1 - v)/n}} dm \\ &= c_1(v) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{(m - m_1)^2}{2(v_1 - v)/n} - \frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \right) dm \\ &\stackrel{3}{=} c_1(v) e^{-\frac{n-1}{2v} \cdot V^*} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{(m - m_1)^2}{2(v_1 - v)/n} - \frac{(m - M_n)^2}{2v/n} \right) dm}_{= \text{const.} e^{-\frac{(m_1 - M_n)^2}{2v_1/n}}} \\ &= c_2(v) \exp \left( -\frac{n-1}{2v} \cdot V^* - \frac{(m_1 - M_n)^2}{2v_1/n} \right), \end{aligned}$$

<sup>1</sup>D.h.  $\varphi := \mathbb{1} \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 > v_0 \chi_{n-1, 1-\alpha}^2 \right\}$

<sup>2</sup>Bemerkung:  $M_n$  unter  $\bar{\mathbf{P}}_v$  hat Verteilung  $\mathcal{N}(m_1, \frac{v_1}{n})$ , denn wenn  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  betrachte:

$$\sqrt{\frac{v_1}{n}} Z + M$$

d.h.  $\bar{\mathbf{P}}_v, v \leq v_1$  sind eine exponentielle Familie (bzgl.  $V^*$ ).

Demnach:  $\tilde{\varphi} = \mathbf{1}_{\{V^* > c\}}$  (wo  $c$  so gewählt, dass  $\bar{\mathbf{P}}_{v_0}(V^* > c) = \alpha$ , mit  $\bar{\mathbf{P}}_{v_0}(V^* > c) = \int \mathbf{P}_{(m,v)}[V^* > c] w_{v_0}(dm) = \mathbf{P}_{(0,v_0)}[V^* > c]$ ) ist ein gleichmäßig bester Test von  $\{\bar{\mathbf{P}}_v : v \leq v_0\}$  gegen  $\{\bar{\mathbf{P}}_{v_1}\}$  zum Niveau  $\alpha$  (und eigentlich  $\varphi = \tilde{\varphi}$ ).

Sei  $\psi$  ein Test von  $\Theta_0$  gegen  $\Theta_1$  zum Niveau  $\alpha$ ,

$$\bar{G}_\psi(v) = \int \underbrace{G_\psi((m, v))}_{\leq \alpha} w_v dm \leq \alpha,$$

also liefert die Optimalität von  $\tilde{\varphi}$ :  $G_\psi((m_1, v_1)) = \bar{G}_\psi(v_1) \leq \bar{G}_{\tilde{\varphi}}(v_1) = G_\varphi((m_1, v_1))$ .

□

### 10.3.2. Bemerkung: (Der rechtsseitige $\chi^2$ -Test für die Varianz)

Der Test  $\varphi = \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n (X_i - M_n) < v_0 \chi_{n-1, \alpha}^2\}}$  von  $H_0 : v \geq v_0$  gegen  $H_1 : v < v_0$  hat das Niveau  $\alpha$  und ist unverfälscht, d.h.

$$\sup_{(m,v) \in \Theta_0} G_\varphi((m, v)) \leq \alpha \leq \inf_{(m,v) \in \Theta_1} G_\varphi((m, v)).$$

(Er entscheidet mit größerer Wahrscheinlichkeit für die Alternative, wenn sie zutrifft, als wenn sie nicht zutrifft.) Er hat unter allen unverfälschten Tests von  $H_0$  gegen  $H_1$  zum Niveau  $\alpha$  die größte Macht (d.h. die Macht ist punktweise nicht kleiner), aber es gibt zu  $\alpha \in (0, 1)$  (viele) Tests, die Niveau  $\alpha$  einhalten und auf Teilen der Alternative größere Macht haben. Für  $m \in \mathbb{R}$  sei  $\varphi_m = \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 < v_0 \chi_{n-1, \alpha}^2\}}$ .  $\varphi_m$  hat Niveau  $\alpha$ :  $(m', v) \in \Theta_0$ .

$$\mathbf{P}_{(m',v)}[\varphi_m = 1] \leq \mathbf{P}_{(m,v)}[\varphi_m = 1] \leq \mathbf{P}_{(m,v_0)}[\varphi_m = 1] = \alpha$$

(Übung:  $\mathcal{N}(0, 1)^{\otimes n}(B_r(\underline{x})) \leq \mathcal{N}(0, 1)^{\otimes n}(B_r(0))$ ).

Für  $\{m\} \times [v_0, \infty)$  gegen  $\{m\} \times (0, v_0)$  ist  $\varphi_m$  ein bester Test, insbesondere (Übung: echt) besser als  $\varphi$ .

Andererseits:

$$G_{\varphi_m}((m', v)) \xrightarrow{m' \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für jedes } v, \text{ insbesondere für } v < v_0.$$

### 10.3.3. Satz: Einseitiger Student'scher T-Test

Im Gauß'schen Produktmodell ist  $\varphi = \mathbf{1}_{\{\frac{\sqrt{n}(M_n - m_0)}{\sqrt{V^*}} > t_{n-1, 1-\alpha}\}}$  ( $t_{n-1, 1-\alpha} = (1 - \alpha)$ -Quantil der Student'schen-Verteilung mit  $n - 1$  Freiheitsgraden) ein bester unverfälschter Test von  $H_0 : m \leq m_0$  gegen  $H_1 : m > m_0$  zum Niveau  $\alpha$ .

<sup>3</sup>mit

$$V^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2$$

**Beweis:**

O.B.d.A.  $m_0 = 0$ . Re-parametrisiere  $\mu = \frac{m\sqrt{n}}{v}, \eta := \frac{1}{2v}$ .

$$\begin{aligned}\rho_{(\mu,\eta)}(X_1, \dots, X_n) &= (2\pi v)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2} \\ &= (2\pi v)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2v} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{m}{v} n \cdot M_n - \frac{nm^2}{2v}\right) \\ &= c(\mu, \eta) \exp\left(-\mu \widetilde{M}_n - \eta S\right)\end{aligned}$$

mit  $\widetilde{M}_n = \sqrt{n}M_n, S = \sum_{i=1}^n X_i^2$ .

$$\begin{aligned}T_0 &= \frac{\sqrt{n}M_n}{V^*} \\ &= \frac{\widetilde{M}_n \sqrt{n-1}}{\sqrt{S - (\widetilde{M}_n)^2}},\end{aligned}$$

denn  $(n-1)V^* = S - nM_n^2$ .

$$\{T_0 > t_{n-1,1-\alpha}\} = \left\{ \frac{\widetilde{M}_n}{\sqrt{S - (\widetilde{M}_n)^2}} > \frac{t_{n-1,1-\alpha}}{\sqrt{n-1}} \right\} = \{\widetilde{M}_n > f(s)\}$$

mit  $f(S) = r\sqrt{\frac{S}{1+r^2}}, r = \frac{t_{n-1,1-\alpha}}{\sqrt{n-1}}$ .

Sei  $\psi$  ein unverfälschter Test von  $\Theta_0$  gegen  $\Theta_1$  zum Niveau  $\alpha$ . Dann gilt

$$\mathbf{E}_{(0,\eta)}[\psi] = \alpha \quad \forall \eta > 0$$

und

$$\mathbf{E}_{(0,\eta)}[\varphi] = \alpha \quad \forall \eta > 0.$$

**Behauptung:** (\*)  $\mathbf{E}_{(0,\eta)}[h(S)(\varphi - \psi)] = 0 \quad \forall h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , die subexponentiell wachsen, d.h.  $h(x)e^{-\delta x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \delta > 0$ .

Zu (\*): Sei  $\gamma \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$   $\mathbf{E}_{(0,\gamma+k)}[\varphi - \psi] = \frac{c(0, \gamma+k)}{c(0, \gamma)} \mathbf{E}_{(0,\gamma)}[e^{-kS}(\varphi - \psi)] = 0 \quad \forall k$ , also

$$\mathbf{E}_{(0,\eta)}[g(e^{-S})(\varphi - \psi)] = 0$$

für jedes Polynom  $g$ , gemäß dem Weierstraß'schen Approximationssatz also für jedes stetige  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  und jedes  $\eta > 0$ . Für gegebenes  $h$  setze

$$g_\delta(x) := \begin{cases} h(\log(1/x))x^\delta, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

( $g_\delta$  ist stetig, und  $g_\delta(e^{-s}) = h(s)e^{-\delta s}$ ), demnach

$$\mathbf{E}_{(0,\eta)} \left[ h(S)e^{-\delta S}(\varphi - \psi) \right] = \mathbf{E}_{(0,\eta)} [g_\delta(e^{-S})(\varphi - \psi)] = 0$$

für jedes  $\delta > 0$ , was (\*) impliziert.

Betrachte ein  $(\mu, \eta) \in \Theta_1$ , der Likelihood-Quotient hat die Gestalt

$$R_{(\mu,\eta),(0,\eta)} = c(\mu, \eta)e^{\mu\tilde{M}_n}.$$

Demnach hat der Verwerfungsbereich von  $\varphi$  die Form

$$\{R_{(\mu,\eta),(0,\eta)} > h(S)\} \text{ mit } h(S) = c_{(\mu,\eta)}e^{\mu f(S)},$$

also

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(\mu,\eta)}[\varphi - \psi] &= \mathbf{E}_{(0,\eta)}[R_{(\mu,\eta),(0,\eta)}(\varphi - \psi)] - \underbrace{\mathbf{E}_{(0,\eta)}[h(S)(\varphi - \psi)]}_{=0 \text{ gemäß } (*)} \\ &= \mathbf{E}_{(0,\eta)} \left[ \underbrace{(R_{(\mu,\eta),(0,\eta)} - h(S))(\varphi - \psi)}_{\geq 0} \right] \geq 0, \end{aligned}$$

d.h. die Macht von  $\varphi$  ist nicht kleiner als die von  $\psi$ .

□



# 11. $\chi^2$ -Anpassungstest

## 11.1. Test auf eine vorgegebene Häufigkeitsverteilung

### Gregor Mendels Erbsenexperimente

Form: rund oder kantig, Farbe: gelb oder grün. Nennen wir  $A$  rund,  $a$  kantig und  $B$  gelb,  $b$  grün. Dabei sind in diesem diploiden Genmodell  $A$  und  $B$  dominant.

Betrachte die Nachkommen eines  $AaBb$ : Es gibt nun 4 Möglichkeiten für den Phänotyp, mit (theoretische) Häufigkeiten gemäß den Mendel'schen Vererberregeln:

	gelb	grün
rund	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$
kantig	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Mendel beobachtete in  $n = 556$  Versuchen:

	gelb	grün
rund	315	108
kantig	101	32

oder in relativen Häufigkeiten:

	gelb	grün
rund	0.567	0.194
kantig	0.181	0.058

**Experiment** mit  $s$  möglichen Ausgängen, Ausgang  $i$  mit Wahrscheinlichkeit  $\rho(i)$ ,  $n$  unabhängige Wiederholungen.

$X_m$  Ausgang des  $m$ -ten Experiments

$$h_n(i) := |\{1 \leq m \leq n : X_m = i\}|,$$

$$\mathbf{P}[h_n(1) = a_1, \dots, h_n(s) = a_s] = \begin{cases} \binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_s} \rho(1)^{a_1} \cdot \dots \cdot \rho(s)^{a_s} & \text{falls } a_1 + a_2 + \dots + a_s = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Verteilung heißt *Multinomialverteilung*.

$$\sum_{i=1}^s \frac{(h_n(i) - n\rho(i))^2}{n\rho(i)} =: D_{n,\rho}(X_1, \dots, X_m)$$

Ziel: Die Verteilung von  $D_{n,\rho}(X)$  unter der  $\text{Multinomial}(n; \rho(1), \rho(2), \dots, \rho(s))$ -Verteilung studieren. Sei  $h_n^*(i) = \frac{h_n(i) - n\rho(i)}{\sqrt{n\rho(i)}}$ . Dann ist

$$\sum_{i=1}^s \sqrt{\rho(i)} \cdot h_n^*(i) = 0$$

und

$$H_\rho := \{x \in \mathbb{R}^s : x^t \cdot u_\rho = 0\}, \quad u_\rho = (\sqrt{\rho(1)}, \dots, \sqrt{\rho(s)})^t,$$

$$\Pi_\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow H_\rho \text{ die Projektion auf } H_\rho.$$

Sei  $O$  eine orthogonale  $s \times s$ -Matrix, deren letzte Spalte  $u_\rho$  ist. Dann wähle

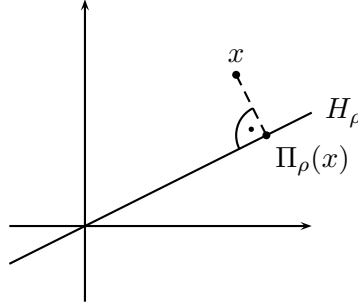


Abbildung 11.1.: Darstellung der orthogonalen Projektion im Zweidimensionalen auf einen eindimensionalen Unterraum

$$\Pi_\rho = O \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} O^t$$

Multivariate Standardnormalverteilung auf  $H_\rho$ :

$$\mathcal{N}(0, 1)^{\otimes s} \cdot \Pi_\rho^{-1} = \mathcal{N}_\rho$$

**Bemerkung:**

$$\mathcal{N}(0, 1)^{\otimes(s-1)} \otimes \delta_0 \circ O^t = \mathcal{N}_\rho$$

**11.1.1. Satz:**

$$(h_n^*(1), \dots, h_n^*(s))^t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{v} \mathcal{N}_\rho$$

**Erinnerung:**

$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{v} \mathbf{Q} : \iff \mathbf{P}[Y_n \in A] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{Q}(A) \quad \forall A \text{ mit } \mathbf{Q}[\partial A] = 0.$  Für die Konvergenz genügt es,  $\mathbf{P}[Y_n \in A] \rightarrow \mathbf{Q}(A)$  für  $A$  der Form  $(-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2] \times \dots \times (-\infty, a_s]$  mit  $a_i \in \mathbb{R}$  zu zeigen.

**Beobachtung:**

$Z_k(i), k = 1, 2, \dots, 1 \leq i \leq s$  unabhängig und  $Z_k(i) \sim \text{Pois}(\rho(i)).$

Betrachte  $S_n(i) := \sum_{k=1}^n Z_k(i), N_n := S_n(1) + S_n(2) + \dots + S_n(s).$  Dann ist  $S_n(i) \sim \text{Pois}(n\rho(i)),$

$S_n(i)$  sind unabhängig,  $N_n \sim \text{Pois}(n)$  und gegeben  $N_n = m$  ist  $(S_n(1), \dots, S_n(s))$

Multinomial( $n; \rho(1), \dots, \rho(s)$ )-verteilt, denn

$$\mathbf{P}[S_n(1) = a_1, \dots, S_n(s) = a_s | N_n = m] = \frac{1}{e^{-n} \frac{n^m}{m!}} \prod_{i=1}^s e^{-\rho(i)n} \frac{(n\rho(i))^{a_i}}{a_i!} = \binom{m}{a_1, \dots, a_s} \rho(1)^{a_1} \dots \rho(s)^{a_s}.$$

Setze

$$S_n^*(i) := \frac{S_n(i) - n\rho(i)}{\sqrt{n\rho(i)}}, \text{ so gilt (mit dem ZGWS) } S_n^* := \begin{pmatrix} S_n^*(1) \\ \vdots \\ S_n^*(s) \end{pmatrix} \xrightarrow{v} \mathcal{N}(0, 1)^{\otimes s}.$$

Sei weiter

$$N_n^* := \sum_{i=1}^s \sqrt{\rho(i)} S_n^*(i) = \frac{N_n - n}{\sqrt{n}}$$

und

$$Y_n^* := O^t S_n^*, \quad Y_n^*(s) = N_n^*.$$

Es gilt:  $Y_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{v} \mathcal{N}(0, 1)^{\otimes s}$ ,

$$\mathbf{P}[h_n^* \in A] = \mathbf{P}[S_n^* \in A | N_n^* = n] = \mathbf{P}[Y_n^* \in O^t A | Y_n^*(s) = 0].$$

Zeige:  $\forall \varepsilon > 0$ :  $\mathbf{P}[h_n^* \in A] \leq \mathbf{P}[S_n^* \in A | N_n^* \in [-\varepsilon, 0]]$  und  $\mathbf{P}[h_n^* \in A] \geq \mathbf{P}[S_n^* \in A | N_n^* \in [0, \varepsilon]]$  für  $A$  der Form  $(-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_s]$ .

Sei  $h_{m,n}^*(i) := \frac{h_m(i) - n\rho(i)}{\sqrt{n\rho(i)}}$ ,  $q_{m,n} := \mathbf{P}[h_{m,n}^* \in A]$ .

$\{h_{m+1,n}^* \in A\} \subset \{h_{m,n}^* \in A\}$ , d.h.  $q_{m+1,n} \leq q_{m,n}$ , also

$$q_{n,n} \geq \sum_{m=n}^{\lfloor n+\varepsilon\sqrt{n} \rfloor} q_{m,n} \mathbf{P}[N_n = m | N_n^* \in [0, \varepsilon]] = \mathbf{P}[S_n^* \in A | N_n^* \in [0, \varepsilon]],$$

analog die andere Ungleichung  $q_{n,n} \leq \mathbf{P}[S_n^* \in A | N_n^* \in [-\varepsilon, 0]]$ .

$$\mathbf{P}[S_n^* \in A] \rightarrow \prod_{i=1}^s \int_{-\infty}^{a_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Sei weiter  $U_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^s : x_s \in [0, \varepsilon]\}$ . Dann gilt:

$$\mathbf{P}[S_n^* \in A | N_n^* \in [0, \varepsilon]] = \frac{\mathbf{P}[\{Y_n^* \in O^t A\} \cap U_\varepsilon]}{\mathbf{P}[Y_n^*(s) \in [0, \varepsilon]]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1)^{\otimes s}(O^t A | U_\varepsilon) =: q_\varepsilon$$

Dann ist

$$q_\varepsilon = \frac{1}{\mathcal{N}(0, 1)([0, \varepsilon])} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} \underbrace{\mathcal{N}(0, 1)^{\otimes(s-1)}(\{x \in \mathbb{R}^{s-1} : (x, r) \in O^t A\})}_{\xrightarrow{r \rightarrow 0} \mathcal{N}_\rho(A)} dr \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{N}_\rho(A).$$

Demnach  $\liminf q_{n,m} \geq \mathcal{N}_\rho(A)$ , analog für  $\limsup$ .

### 11.1.2. Korollar:

Unter  $\mathbf{P}_\rho$  gilt:

$$\sum_{i=1}^s (h_n^*(i))^2 = D_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{v} \chi_{s-1}^2,$$

denn

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\rho \left[ \sum_{i=1}^s (h_n^*(i))^2 \leq c \right] &= P_\rho[h_n^* \in \{x \in \mathbb{R}^s : \|x\|^2 \leq c\}] \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}_\rho(\{x : \|x\|^2 \leq c\}) = \left( \mathcal{N}(0, 1)^{\otimes(s-1)} \otimes \delta_0 \right) (\{x \in \mathbb{R}^s : \|x\|^2 \leq c\}) = \chi_{s-1}^2([0, c]). \end{aligned}$$

### 11.1.3. $\chi^2$ -Anpassungstest

Zu  $\alpha \in (0, 1)$  sei  $c = (1 - \alpha)$ -Quantil von  $\chi_{s-1}^2$ . Der Test von  $H_0 : \vartheta = \rho$  gegen  $H_1 : \vartheta \neq \rho$  mit Ablehungsbereich  $\{D_n > c\}$  hat (asymptotisches) Niveau  $\alpha$ .

**Zurück zu Mendel:**

$D_{556} = 0.47$ ,  $\chi_3^2([0, 0.47]) = 0.075$ , der  $\chi^2$ -Test lehnt  $H_0$  nicht ab.

## 11.2. $\chi^2$ -Test auf Unabhängigkeit:

Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige Werte in  $E = \{1, \dots, a\} \times \{1, \dots, b\} =: A \times B$ ,  $a, b > 1$   
 $\mathbf{P}_\vartheta[X_1 = (i, j)] = \vartheta(i, j)$ ,

$$\Theta = \{\vartheta = (\vartheta(i, j))_{i \in A, j \in B} : \vartheta(i, j) > 0, \sum_{i, j} \vartheta(i, j) = 1\}$$

Marginalverteilungen:

$$\vartheta(i, \cdot) := \sum_{j \in B} \vartheta(i, j), \vartheta(\cdot, j) := \sum_{i \in A} \vartheta(i, j)$$

$$\begin{aligned} \Theta_0 &:= \{\vartheta \in \Theta : \vartheta(i, j) = \vartheta(i, \cdot) \vartheta(\cdot, j) \forall i, j\} \\ &= \{\vartheta \in \Theta : \vartheta(i, j) = \alpha(i) \cdot \beta(j) \text{ für W'keitsvektoren } \alpha \text{ auf } A \text{ und } \beta \text{ auf } B\} \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$h_n(i, j) = |\{1 \leq k \leq n : X_k = (i, j)\}|$$

und berechne

$$\tilde{D}_n := \sum_{i, j} \frac{h_n(i, j) - n \cdot \frac{1}{n} h_n(i, \cdot) \cdot \frac{1}{n} h_n(\cdot, j)}{\frac{1}{n} h_n(i, \cdot) \cdot h_n(\cdot, j)} = \sum_{i, j} \frac{h_n(i, j) - \frac{1}{n} h_n(i, \cdot) \cdot h_n(\cdot, j)}{\frac{1}{n} h_n(i, \cdot) \cdot h_n(\cdot, j)}.$$

### 11.2.1. Satz:

Für  $\vartheta = \alpha \otimes \beta \in \Theta_0, c > 0$  gilt

$$\mathbf{P}_\vartheta[\tilde{D}_n \leq c] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \chi_{(a-1)(b-1)}^2([0, c]).$$

**Beweis:**

Sei  $s = a \cdot b, r = (a - 1) \cdot (b - 1), \vartheta = \alpha \otimes \beta$

$$\tilde{h}_n(i, j) := \frac{h_n(i, j) - \frac{1}{n}h_n(i, \cdot)h_n(\cdot, j)}{\sqrt{\frac{1}{n}h_n(i, \cdot)h_n(\cdot, j)}}$$

somit  $\tilde{D}_n = \|h_n\|^2$ .

**Beweisidee:**

$$h_{n, \alpha\beta}^* := \left( \frac{h_n(i, j) - n\alpha(i)\beta(j)}{\sqrt{n\alpha(i)\beta(j)}} \right)_{ij} \approx \mathcal{N}_{\alpha\otimes\beta} \text{ unter } \mathbf{P}_{\alpha\otimes\beta}$$

(gemäß Satz 11.1.1)

Definiere:

$$h_n^\circ(i, j) = \frac{h_n(i, j) - \frac{1}{n}h_n(i, \cdot)h_n(\cdot, j)}{\sqrt{n\alpha(i)\beta(j)}}$$

sei

$$a_l = (a_l(i, j)) = (\sqrt{\alpha(i)}\delta_{jl}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha(1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\alpha(a)} \end{pmatrix},$$

wobei  $\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha(1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\alpha(a)} \end{pmatrix}$  der  $l$ -te Spaltenvektor von  $b$ -vielen Spalten ist.

und

$$b_k = (b_k(i, j)) = (\sqrt{\beta(j)}\delta_{ki}) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \sqrt{\beta(1)} & \dots & \sqrt{\beta(b)} \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt  $h_n^\circ \cdot a_l = 0, h_n^\circ \cdot b_k = 0, M = \text{span}(a_l, b_k, l = 1, \dots, b, k = 1, \dots, a)$

**Behauptung:**  $\dim M = a + b - 1$ :

$$\sum_1^b \sqrt{\beta(l)}a_l = \sum_1^a \sqrt{\alpha(k)}b_k = (\sqrt{\alpha(i)} \cdot \sqrt{\beta(j)})_{i,j} =: u_s,$$

also  $\dim M \leq a + b - 1$ , zeige  $a_1, \dots, a_b, b_1, \dots, b_{a-1}$  sind linear unabhängig.(Übung)

$L :=$  orthogonales Komplement von  $M, h_n^\circ \in L$ .

Ergänze  $u_s$  zu Orthonormalbasis  $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_s$  von  $M$ , diese zu Orthonormalbasis  $u_1, \dots, u_s$  von  $\mathbb{R}^s = L \oplus M$ . Setze:

$$\mathcal{O}_{\alpha\beta} := \left( \begin{array}{ccc|c} u_1 & \dots & u_s & \\ \hline | & & | & \\ \hline \end{array} \right) \text{ ist orthogonal, } \Pi_{\alpha\beta} = \mathcal{O}_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_{\alpha\beta}^t$$

wobei in der Diagonalen nur  $r$ -viele 1-er stehen, ist die Projektion auf  $L$ .

Zeige:  $\left\| h_n^\circ - \Pi_{\alpha\beta} h_{n,\alpha\beta}^* \right\|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  in Verteilung unter  $\mathbf{P}_{\alpha\otimes\beta}$ .

Es gilt:

$$\Pi_{\alpha\beta} h_{n,\alpha\beta}^*(i, j) = \frac{h_n(i, j) + n\alpha(i)\beta(j) - \alpha(i)h_n(\cdot, j) - h_n(i, \cdot)\beta(j)}{\sqrt{n\alpha(i)\beta(j)}},$$

denn rechte Seite  $\perp a_l, b_k$ , also rechte Seite  $\in L$  und  $h_n^*$  - Rechte Seite  $\in \text{span}(a_l, b_k) = L^\perp$ .

$$(h_n^\circ - \Pi_{\alpha\beta} h_{n,\alpha\beta}^*)(i, j) = \eta_n^A(i) \cdot \eta_n^B(j),$$

wo  $\eta_n^A(i) := \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\alpha(i)}} \left( \frac{1}{n} h_n(i, \cdot) - \alpha(i) \right), \eta_n^B(j) := \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\beta(j)}} \left( \frac{1}{n} h_n(\cdot, j) - \beta(j) \right)$  und es gilt

$$\eta_n^A(i), \eta_n^B(j) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{V} 0 \text{ unter } \mathbf{P}_{\alpha\otimes\beta}$$

(mit ZGWS oder Čebyšev-Ungleichung).

Wir wissen:

$$h_{n,\alpha}^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{V} \mathcal{N}_{\alpha\otimes\beta} = (\mathcal{N}(0, 1))^{\otimes(s-1)} \otimes \delta_0 \circ \mathcal{O}_{\alpha\beta}^{-1}$$

□

### 11.2.2. Korollar: $\chi^2$ -Test auf Unabhängigkeit

Sei  $\alpha \in (0, 1), c = (1 - \alpha)$ -Quantil von  $\chi_{(a-1)(b-1)}^2$ . Der Test von  $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$  gegen  $H_1 : \vartheta \in \Theta \setminus \Theta_0$  mit Ablehnungsbereich  $\{\tilde{D}_n > c\}$  hat asymptotisches Niveau  $\alpha$ .

#### Bemerkung:

$\dim \Theta = a \cdot b - 1$  und  $\dim(\Theta_0) = a - 1 + b - 1$ . Es ist:

$$(a - 1)(b - 1) = ab - 1 - ((a - 1) + (b - 1)).$$

Das Schätzen der unbekanntten Marginalverteilungen „verbraucht“  $a + b - 2$  Freiheitsgrade.

#### Beispiel: Zulassungsstatistik der Berkeley-Kandidaten, Simpson-Paradoxon

Im Herbst 1973 haben sich an der Universität Berkeley 12763 Kandidaten für ein Studium beworben, davon 8442 Männer und 4321 Frauen. Es kam zu folgenden Zulassungszahlen:

	Aufgenommen	Abgelehnt
Männer	3738	4704
Frauen	1494	2827

Demnach betrug die Zulassungsquote bei den Männern ca. 44%, bei den Frauen nur ca. 35%. Ein  $\chi^2$ -Test auf Unabhängigkeit (mit  $\mathbf{R}$ ) zeigt, dass eine solche Unverhältnismäßigkeit nur mit verschwindend kleiner Wahrscheinlichkeit durch „reinen Zufall“ entsteht:

```

> berkeley <- matrix(c(3738,4704,1494,2827),nrow=2,byrow=TRUE)
> berkeley
      [,1] [,2]
[1,] 3738 4704
[2,] 1494 2827
> chisq.test(berkeley)

```

Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction

```

data: berkeley
X-squared = 110.8489, df = 1, p-value < 2.2e-16

```

Dieser Fall hat einiges Aufsehen erregt, er wurde u.A. diskutiert in P.J. Bickel, E.A. Hammel, J.W. O'Connell, Sex Bias in Graduate Admissions: Data from Berkeley, *Science*, **187**, no. 4175, 398–404 (1975). Bemerkenswerterweise verschwindet das Ungleichgewicht, wenn man die Zulassungszahlen nach Departments aufspaltet: Es stellt sich heraus, dass innerhalb der Departments die Aufnahmewahrscheinlichkeiten nicht signifikant vom Geschlecht abhängen, aber sich Frauen häufiger bei Departments mit (absolut) niedriger Aufnahmequote beworben haben als Männer – dies ist ein Beispiel für das sogenannte *Simpson-Paradox*. Die genauen nach Departments aufgeschlüsselten Bewerber- und Zulassungszahlen sind leider nicht öffentlich zugänglich (siehe aber Abb. 1 in Bickel et. al, loc. cit, für eine grafische Aufbereitung der Daten, die den Simpson-Effekt zeigt). Bickel et. al demonstrieren das Phänomen mittels eines hypothetischen Beispiels:

	Aufgenommen	Abgelehnt
	<i>Department of machismathics</i>	
Männer	200	200
Frauen	100	100
	<i>Department of social warfare</i>	
Männer	50	100
Frauen	150	300
	<i>Gesamt</i>	
Männer	250	300
Frauen	250	400





# 12. Regression und das lineare Modell

## 12.1. „Einfache“ Regression:

### Modell:

Seien  $X_k = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot t_k + \sqrt{v}\xi_k, k = 1, \dots, n$  unsere Beobachtungen (Zielvariablen), wo  $\gamma_1, \gamma_2$  die unbekanntes Koeffizienten,  $t_1, \dots, t_n$  bekannte Werte (die Ausgangs- oder Regressorvariable) und  $\xi_1, \dots, \xi_n$  Störgrößen (mit  $\mathbf{E}[\xi_i] = 0, \text{Var}(\xi_i) = 1$ ), sowie  $v > 0$  der Varianzparameter. (Wir nehmen dabei an, dass nicht alle  $t_i$  identisch sind.)

### Problem:

Anhand der  $X_i$  und  $t_i$  auf  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  schließen.

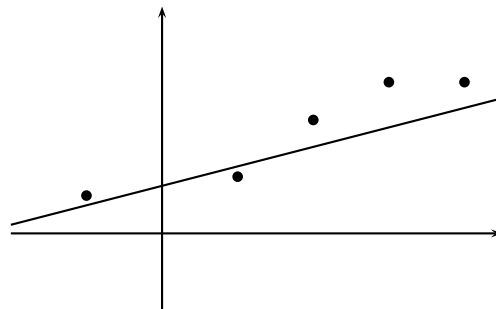


Abbildung 12.1.: Ausgleichsgerade zu gegebenen Punkten

### Vorschlag: Regressionsgerade via kleinste Quadrate

Für  $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$  und Realisierungen  $x_1, \dots, x_n$  von  $X_1, \dots, X_n$  sei

$$F_\gamma := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - (\gamma_0 + \gamma_1 \cdot t_i))^2,$$

wähle  $\hat{\gamma}$  so, dass  $F_{\hat{\gamma}} = \min_{\gamma} F_\gamma$ .

**Bemerkung:**

Die Abbildung  $\gamma \mapsto F_\gamma$  ist glatt und  $\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} F_\gamma = \infty$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \gamma_0} F_\gamma \\ &= -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - (\gamma_0 + \gamma_1 t)) \\ &\quad \text{und} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial \gamma_1} F_\gamma \\ &= -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n t_i (X_i - \gamma_0 - \gamma_1 t) \end{aligned}$$

$$\iff \gamma_0 + \gamma_1 M(t) = M(X) \quad (1),$$

wo  $M(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$  und

$$\gamma_0 M(t) + \gamma_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i X_i \quad (2)$$

Weiter gilt:

$$(2) \iff \gamma_0 M(t) + \gamma_1 (V(t) + M(t)^2) = C(X, t) + M(X)M(t) \quad (3),$$

mit  $V(t) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n t_i^2 \right) - M(t)^2$  und  $C(X, t) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n t_i X_i \right) - M(X)M(t)$

Setze (1) in (3) ein:

$$\gamma_1 \cdot V(t) = C(X, t)$$

**12.1.1. Satz:**

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{C(X, t)}{V(t)}, \hat{\gamma}_0 = M(X) - \frac{M(t)}{V(t)} C(X, t)$$

sind die eindeutig bestimmten kleinste-Quadrate-Schätzer für  $\gamma$ . Sie sind erwartungstreue Schätzer für  $\gamma$ .

**Beweis:**

Eindeutigkeit ist klar.

Zur Erwartungstreue: Sei  $\vartheta := (\gamma, v)$ . Dann

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\vartheta[\hat{\gamma}_1] &= \frac{1}{V(t)} \mathbf{E} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i X_i - M(t) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] \\ &= \frac{1}{V(t)} \mathbf{E} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i (\gamma_0 + \gamma_1 t_i + \sqrt{v} \xi_i) - M(t) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\gamma_0 + \gamma_1 t_i + \sqrt{v} \xi_i) \right] \\ &= \frac{\gamma_1 V(t)}{V(t)} \end{aligned}$$

und ebenso:

$$\mathbf{E}_\vartheta[\hat{\gamma}_0] = \underbrace{\mathbf{E}_\vartheta[M(X)]}_{\gamma_0 + \gamma_1 M(t)} - \frac{M(t)}{V(t)} \underbrace{\mathbf{E}_\vartheta \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i (\gamma_0 + \gamma_1 t_i + \sqrt{v} \xi_i) - M(t) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\gamma_0 + \gamma_1 t_i + \sqrt{v} \xi_i) \right]}_{= \frac{M(t)}{V(t)} \cdot \gamma_1 V(t)}$$

**Bemerkung:**

- (i) Die Regressionsgerade verläuft durch den Schwerpunkt  $(M(t), M(X))^t$  der „Punktwolke.“
- (ii) Der „Regressionsvektor“

$$\hat{\gamma}_0 \vec{1} + \hat{\gamma}_1 \vec{t} = \hat{\gamma}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \hat{\gamma}_1 \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ \vdots \\ t \end{pmatrix}$$

ist die (orthogonale) Projektion auf  $L = \text{span}(\vec{1}, \vec{t})$ .

## 12.2. Das lineare Modell:

**Szenario:**

Sei  $n, s \in \mathbb{N}, s < n$ , Parameter  $\gamma \in \mathbb{R}^s$ , Varianzparameter  $v > 0$ , „Designmatrix“  $(n \times s)$ -Matrix  $A$  mit maximalem Rang  $s$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_n$  Störgrößen,  $\mathbf{E}[\xi_i] = 0$ ,  $\text{Var}(\xi_i) = 1$ , unkorreliert. Beobachtungen  $X = (X_1, \dots, X_n)^t$  entsteht als

$$X = A \cdot \gamma + \sqrt{v} \xi.$$

**Bemerkung:**

Sei  $L = \{A\eta : \eta \in \mathbb{R}^s\}$  der Spaltenraum von  $A$ ,  $\Pi_L : \mathbb{R}^n \rightarrow L$  die orthogonale Projektion auf  $L$ . Dabei gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ :

(i)  $\Pi_L x \in L$  und  $|x - \Pi_L x|^2 \leq \min_{u \in L} |x - u|^2$

(ii)  $\Pi_L x \in L$  und  $x - \Pi_L x \perp L$

(und  $\Pi_L x$  ist durch (i) und durch (ii) charakterisiert)

(ii)  $\Leftrightarrow$  (ii)'  $\Pi_L x \in L$  und  $u^t(x - \Pi_L x) = 0$  für  $u$  aus einer Basis von  $L \iff A^t(x - \Pi_L x) = 0$

**Bemerkung:**

$A^t A$  ist invertierbar, und  $\Pi_L = A(A^t A)^{-1} A^t$ .

**Beweis der Bemerkung:**

Angenommen  $A^t A c = 0$  für ein  $c \in \mathbb{R}^s \setminus \{0\}$ . Dann ist

$$|Ac|^2 = c^t A^t A c = 0 \text{ im } \not\Leftarrow \text{ zu } \text{Rang}(A) = s.$$

Weiterhin ist

$$A(A^t A)^{-1} A^t x \in L, \quad A^t(x - A(A^t A)^{-1} A^t x) = A^t x - A^t x = 0 \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}^n.$$

**12.2.1. Satz von Gauß-Markov**

Die Störgrößen  $\xi_i$  erfüllen  $E[\xi_i] = 0$ ,  $\text{Var}(\xi_i) = 1$  und seien unkorreliert. Dann gilt:

- (i) Der kleinste Quadrate Schätzer  $\hat{\gamma} = (A^t A)^{-1} A^t X$  ist erwartungstreu für  $\gamma$ .
- (ii) Ist  $\tau : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  eine lineare Kenngröße von  $\gamma$  (d.h.  $\tau(\gamma) = c^t \gamma$  für ein  $c \in \mathbb{R}^s$ ), dann ist  $T := c^t \hat{\gamma}$  erwartungstreuer Schätzer für  $\tau(\gamma)$  und hat unter allen erwartungstreuen linearen Schätzern für  $\tau(\gamma)$  die kleinste Varianz.
- (iii)  $V^* := \frac{|X - \Pi_L X|^2}{n - s} = \frac{|X|^2 - |\Pi_L X|^2}{n - s} = \frac{|X - A\hat{\gamma}|^2}{n - s}$  ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz  $v$ .

**Beweis:**

Sei  $\vartheta = (\gamma, v)$ .

(i)

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\vartheta}(\hat{\gamma}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{\vartheta}(\hat{\gamma}_s) \end{pmatrix} &= \mathbf{E}_{\vartheta}[\hat{\gamma}] \\
 &= \mathbf{E}_{\vartheta}[(A^t A)^{-1} A^t X] \\
 &= (A^t A)^{-1} A^t \underbrace{\mathbf{E}_{\vartheta}[X]}_{=A\gamma} \\
 &= \gamma
 \end{aligned}$$

(Beobachtung:  $\Pi_L X = \underbrace{A(A^t A)^{-1} A^t X}_{=\hat{\gamma}}$ , also ist es der kleinste-Quadrate-Schätzer.)

(ii)  $\mathbf{E}_{\vartheta}[T] = c^t \mathbf{E}_{\vartheta}[\hat{\gamma}] = c^t \gamma = \tau(\gamma)$ , also erwartungstreu für  $\tau(\gamma)$ .

Sei  $a := A(A^t A)^{-1} c (\in L)$ . Zeige:  $T = a^t X$ .

Klar, denn

$$\Pi_L a = a \iff a^t \Pi_L = a^t, A^t a = c \implies a^t A = c^t,$$

somit  $\tau(\gamma) = c^t \gamma = a^t A \gamma$ ,  $\tau(\hat{\gamma}) = a^t A (A^t A)^{-1} A X = a^t X$ .

Sei  $S := b^t X$  irgendein linearer Schätzer mit  $\mathbf{E}_{\vartheta}[S] = \tau(\gamma)$  ( $\forall \vartheta = (\gamma, v)$ ), also

$b^t A \gamma = \mathbf{E}_{\vartheta}[b^t X] = \tau(\gamma) = \mathbf{E}_{\vartheta}[a^t X] = a^t A \gamma$  für jedes  $\gamma \in \mathbb{R}^s$ , d.h.  $(b - a)^t u = 0 \quad \forall u \in L$ ,

( $\Leftrightarrow b - a \perp L$ ), folglich ist  $a = \Pi_L b$ , insbesondere  $|a|^2 \leq |b|^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Var}_\vartheta(S) - \text{Var}_\vartheta(T) &= \mathbf{E}_\vartheta[(\underbrace{b^t (X - A\gamma)}_{\sqrt{v\xi}})^2 - (\underbrace{a^t (X - A\gamma)}_{\sqrt{v\xi}})^2] \\ &= v \mathbf{E}_\vartheta[b^t \xi \xi^t b - a^t \xi \xi^t a] \\ &= v(b^t \underbrace{\mathbf{E}_\vartheta[\xi \xi^t]}_{=I_n} b - a^t \underbrace{\mathbf{E}_\vartheta[\xi \xi^t]}_{=I_n} a) \\ &= v(|b|^2 - |a|^2) \geq 0 \end{aligned}$$

(iii) Sei  $u_1, \dots, u_s$  eine Orthonormalbasis von  $L$ , ergänze zu ONB  $u_1, \dots, u_n$  von  $\mathbb{R}^n$ . Betrachte

die Matrix  $O := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$ ,  $\Pi_L = O \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 & \dots \\ 0 & & & & \dots & 0 \end{pmatrix} O^t$  mit  $s$  Einsen in

der Diagonalen ist die Projektion auf  $L$ ,  $\eta = O^t \xi$ .

Es ist

$$\begin{aligned} (n-s)V^* &= |A\gamma + \sqrt{v}\xi - \Pi_L(A\gamma + \sqrt{v}\xi)|^2 \\ &= v|\xi - \Pi_L \xi|^2 \\ &= v \left| O\eta - O \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 & \dots \\ 0 & & & & \dots & 0 \end{pmatrix} \underbrace{O^t O \eta}_{=I_n} \right| \\ &= v \left| \eta - \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 & \dots \\ 0 & & & & \dots & 0 \end{pmatrix} \eta \right| \\ &= v \sum_{k=s+1}^n \eta_k^2, \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{E}_\vartheta[\eta_k^2] = \mathbf{E}_\vartheta \left[ \sum_{i,j} O_{ik} O_{jk} \xi_i \xi_j \right] = \sum_i O_{ik} O_{ik} = \sum_i O_{ik} O_{ki}^t = (OO^t)_{ii} = 1.$$

### 12.3. Das normale lineare Modell:

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass die  $\xi_i$  u.a.,  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt sind.

### 12.3.1. Verallgemeinerung des Satzes von Student

Im normalverteilten linearen Modell gilt unter  $\mathbf{P}_{(\gamma,v)}$ :

- (i)  $\hat{\gamma} \sim \mathcal{N}(\gamma, v(A^t A)^{-1})$
- (ii)  $\frac{n-s}{v} V^*$  ist  $\chi_{n-s}^2$ -verteilt und unabhängig von  $\hat{\gamma}$ .
- (iii)  $\frac{1}{v} |A(\hat{\gamma} - \gamma)|^2 = \frac{1}{v} |\Pi_L X - \mathbf{E}_{(\gamma,v)}[X]|^2$  ist  $\chi_s^2$ -verteilt und ist unabhängig von  $V^*$ , insbesondere:

$$\frac{|A(\hat{\gamma} - \gamma)|^2}{s \cdot V^*} \text{ ist Fisher}_{s,n-s}\text{-verteilt}$$

- (iv)  $H \subset L$  linearer Teilraum von  $L$ ,  $\dim H = r < s$  und  $A\gamma \in H$ , dann ist  $\frac{1}{v} |\Pi_L X - \Pi_H X|^2$   $\chi_{s-r}^2$ -verteilt und es ist unabhängig von  $V^*$ , insbesondere ist

$$F_{H,L} := \frac{n-s}{s-r} \frac{|\Pi_L X - \Pi_H X|^2}{|X - \Pi_L X|^2} = \frac{|A\hat{\gamma} - \Pi_H X|^2}{(s-r)V^*} \text{ Fisher}_{s-r,n-s}\text{-verteilt.}$$

**Bemerkung:**

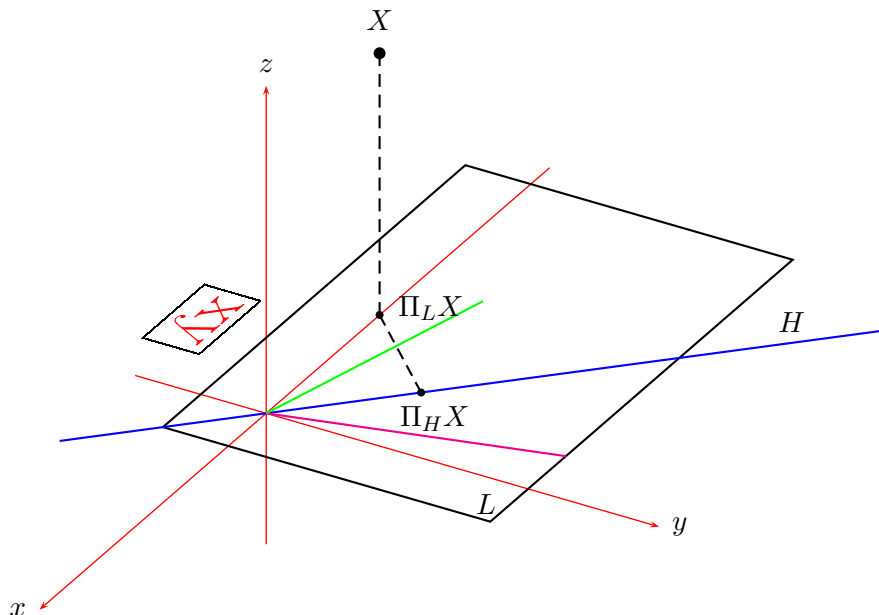


Abbildung 12.2.: Darstellung der Projektionen eines Punktes  $X$  im  $\mathbb{R}^3$  auf  $H \subset L \subset \mathbb{R}^3$ ,  $L$  ist dabei die Ebene, die durch das Rechteck  $L$  dargestellt werden soll und  $H$  der Unterraum, der von der blauen Geraden aufgespannt wird.

Es gilt

$$|\Pi_L X - \Pi_H X|^2 = |\Pi_L X|^2 - |\Pi_H X|^2 = |X - \Pi_H X|^2 - |X - \Pi_L X|^2 \quad (\text{Pythagoras})$$

und

$$|X - \Pi_L X|^2 = |X|^2 - |\Pi_L X|^2.$$

**Beweis des Satzes:**

- (i)  $\hat{\gamma}$  ist  $s$ -dimensional normalverteilt; es gilt:

$$\mathbf{E}_{(\gamma,v)}[\hat{\gamma}] = (A^t A)^{-1} A \cdot \mathbf{E}_{(\gamma,v)}[X] = \gamma$$

und

$$\text{Cov}(\hat{\gamma}) = (A^t A)^{-1} A v I_n \cdot A^t ((A^t A)^{-1})^t = v(A^t A)^{-1}.$$

- (ii) Sei o.B.d.A.  $u_1, \dots, u_n$  eine ONB von  $\mathbb{R}^n$  mit  $H = \text{span}(u_1, \dots, u_r), L = \text{span}(u_1, \dots, u_s), O = (u_1, \dots, u_n), \eta := O^t \xi, \eta$  ist  $\mathcal{N}(0, 1)^{\otimes n}$ -verteilt.

$$\begin{aligned} \frac{n-s}{v} V^* &= \frac{1}{v} |A\gamma + \sqrt{v}\xi - \Pi_L(A\gamma + \sqrt{v}\xi)|^2 \\ &= |\xi - \Pi_L \xi|^2 \\ &= \sum_{i=s+1}^n \eta_i^2 \sim \chi_{n-s}^2 \end{aligned}$$

- (iii)

$$\frac{1}{v} |\Pi_L X - A\gamma|^2 = |\Pi_L \xi|^2 = \sum_{i=1}^s \eta_i^2 \sim \chi_s^2$$

und ist unabhängig von  $V^*$ .

- (iv)  $\frac{1}{v} |\Pi_L X - \Pi_H X|^2 = |\Pi_L \xi - \Pi_H \xi|^2 = \sum_{i=r+1}^s \eta_i^2 \sim \chi_{s-r}^2$  und unabhängig von  $V^*$ .

**12.3.2. Korollar: Konfidenzbereiche im normalverteilten linearen Modell**

Sei  $\alpha \in (0, 1)$ .

- (i)  $C_{\hat{\gamma}} := \{\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^s : |A(\tilde{\gamma} - \hat{\gamma})|^2 < s \cdot V^* \cdot f_{s,n-s;1-\alpha}\}$  ist ein Konfidenzbereich für  $\gamma$  zum Sicherheitsniveau  $1 - \alpha$ , wobei  $f_{s,n-s;1-\alpha}$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der Fisherverteilung mit  $s$  und  $n - s$  Freiheitsgraden ist.
- (ii) Sei  $\tau(\gamma) = c^t \gamma$  ( $c \in \mathbb{R}^s$ ) ein lineares Parametermerkmal.

$$C_{\tau} = (c^t \hat{\gamma} - \delta \sqrt{V^*}, c^t \hat{\gamma} + \delta \sqrt{V^*}),$$

wo  $\delta = \sqrt{c^t (A^t A)^{-1} c} \cdot t_{n-s, 1-\frac{\alpha}{2}}$  mit  $t_{n-s, 1-\frac{\alpha}{2}}$  dem  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Student'schen Verteilung mit  $n - s$ -Freiheitsgraden, ist ein Konfidenzintervall für  $\tau(\gamma)$  zum Sicherheitsniveau  $\alpha$ .

- (iii)  $C_v := (\frac{n-s}{\chi_{n-s, 1-\frac{\alpha}{2}}^2} V^*, \frac{n-s}{\chi_{n-s, \frac{\alpha}{2}}^2} V^*)$  ist ein Konfidenzintervall für  $v$  zum Sicherheitsniveau  $1 - \alpha$ .

**Beweis:**

- (i) Mit  $\frac{|A(\tilde{\gamma} - \hat{\gamma})|^2}{sV^*} \sim f_{s,n-s}$ -verteilt  $\checkmark$
- (ii)  $Z := c^t \hat{\gamma} \sim \mathcal{N}(c^t \gamma, v c^t (A^t A)^{-1} c)$ , also ist  $Z^* = \frac{Z - c^t \gamma}{\sqrt{v c^t (A^t A)^{-1} c}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und somit  $T := \frac{Z^*}{\sqrt{\frac{V^*}{v}}} \sim t_{n-s}$ . Dann ist  $\mathbf{P}_{(\gamma,v)}[|T| \leq t_{n-s, 1-\frac{\alpha}{2}}] = \alpha$ .

(iii)

$$\mathbf{P}_{(\gamma,v)} \left[ v \in \left( \frac{n-s}{\chi_{n-s,1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{n-s}{\chi_{n-s,\frac{\alpha}{2}}^2} \right) \right] = \mathbf{P}_{(\gamma,v)} \left[ \chi_{n-s,\frac{\alpha}{2}}^2 < \frac{n-s}{v} V^* < \chi_{n-s,1-\frac{\alpha}{2}}^2 \right] = 1 - \alpha$$

### 12.3.3. Korollar: Tests im normalverteilten linearen Modell

Sei  $\alpha \in (0, 1)$ .

(i) ( $t$ -Test für  $c^t \gamma = m_0$ , bzw.  $\leq$  oder  $\geq$ )

Der Ablehnungsbereich

$$\left\{ |c^t \hat{\gamma} - m_0| > t_{n-s,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{c^t (A^t A)^{-1} c V^*} \right\}$$

definiert einen Test von  $H_0 : c^t \gamma = m_0$  gegen  $H_1 : c^t \gamma \neq m_0$  zum Irrtumsniveau  $\alpha$ .

Analog definiert

$$\left\{ c^t \hat{\gamma} - m_0 \gtrless t_{n-s,1-\alpha} \cdot \sqrt{c^t (A^t A)^{-1} c V^*} \right\}$$

einen (einseitigen) Test von  $H_0 : c^t \gamma \gtrless m_0$  gegen  $H_1 : c^t \gamma \lessgtr m_0$ .

(ii) Sei  $H \subseteq L$  linearer Unterraum,  $\dim H = r < s$ ,

$$F_{H,L} := \frac{n-s}{s-r} \frac{|\Pi_L X - \Pi_H X|^2}{|X - \Pi_L|^2}.$$

Der Ablehnungsbereich

$$\{F_{H,L} > f_{s-r,n-s;1-\alpha}\}$$

mit  $f_{s-r,n-s;1-\alpha} = (1 - \alpha)$ -Quantil der Fisher $_{s-r,n-s}$ -Verteilung definiert einen Test von  $H_0 : A\gamma \in H$  gegen  $H_1 : A\gamma \notin H$  zum Niveau  $\alpha$ .

(iii) Sei  $v_0 > 0$ . Der Ablehnungsbereich

$$\{(n-s)V^* \gtrless v_0 \chi_{n-s,1-\alpha}^2\}$$

definiert einen Test von  $H_0 : v \gtrless v_0$  gegen  $H_1 : v \lessgtr v_0$  zum Niveau  $\alpha$ .

#### Beweis:

Wir betrachten exemplarisch (ii): Für jedes  $\gamma \in H_0$ ,  $v > 0$  ist  $F_{H,L}$  unter  $\mathbf{P}_{(\gamma,v)}$  Fisher $_{s-r,n-s}$ -verteilt, demnach gilt

$$\mathbf{P}_{(\gamma,v)}[F_{H,L} > f_{s-r,n-s;1-\alpha}] = \alpha.$$

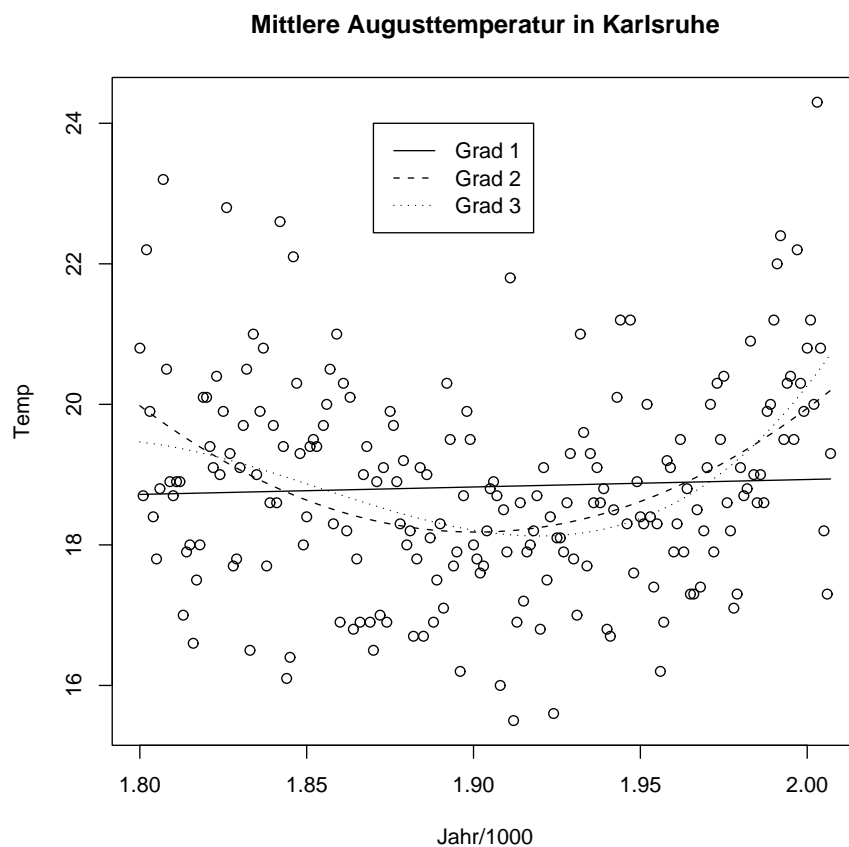


### 12.3.4. Beispiel: Polynomielle Regression

Seien  $t_1, \dots, t_n$  die (Werte der) Regressor-Variable,  $X_i = \gamma_0 + \sum_{j=1}^d \gamma_j t_i^j + \sqrt{v}\xi_i$ ,  $s = d + 1$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^d \end{pmatrix}$$

Auf der Website <http://www.klimadiagramme.de> finden sich u.A. die Durchschnittstemperaturen in Karlsruhe im August in den Jahren 1800 bis 2007 ( $n = 206$  Beobachtungen, denn die Jahre 1854 und 1945 fehlen):



August-Durchschnittstemperaturen in Karlsruhe und Ausgleichspolynome

$$t_1(x) = 1.064x + 16.804, \quad t_2(x) = 177.9x^2 - 676.3x + 660.8,$$

$$t_3(x) = 1190x^3 - 6618x^2 + 12252x - 7532$$

( $t_i$  ist jeweils das Polynom vom Grad  $\leq i$ , das die quadratische Abweichung minimiert).

Um beispielsweise zu testen, ob (wenn man normalverteilte Fehlerterme unterstellt) der Koeffizient  $\gamma_1$  in  $t_1(x) = \gamma_1 x + \gamma_0$  signifikant von 0 verschieden ist, können wir Korollar 12.3.3 verwenden: Es ist

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix}, \quad (A^t A)^{-1} = \frac{1}{\text{Var}(t_i)} \begin{pmatrix} \sum t_i^2 & \sum t_i \\ \sum t_i & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Dann ist  $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $c^t(A^t A)^{-1}c = \frac{1}{n \cdot \text{Var}(t_i)}$  und

$$\frac{1.064 - 0}{\sqrt{\frac{V^*}{n \cdot \text{Var}(t_i)}}} \approx 0.614 < t_{206-2, 1-0.01/2} = 2.60,$$

d.h. die Nullhypothese  $\gamma_1 = 0$  kann nicht zum Niveau  $\alpha = 0.01$  verworfen werden.

Siehe Abschnitt A.2 für den zur Berechnung verwendeten R-Code.

## 12.4. Varianzanalyse:

**Bemerkung:** In der englischen Literatur ist das Akronym ANOVA=ANalysis Of VAriance üblich.

Seien  $X_1, \dots, X_n$   $n$  Beobachtungen in  $s$  Gruppen (gem.  $s$  möglichen Werten eines „Faktors“).  $n_1 + \dots + n_s = n$ .

Modell: Sei  $X_{i,k}$  die Beobachtung  $k$  in Gruppe  $i$ . Dann ist

$$X_{i,k} = m_i + \sqrt{v}\xi_{i,k} \text{ mit } \xi_{i,k} \text{ u.i.v. } \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

(„Wörtlicher“ Bezug zum linearen Modell:

$$X = (X_{1,1}, X_{1,2}, \dots, X_{1,n_1}, X_{2,1}, \dots, X_{2,n_2}, \dots, X_{s,1}, \dots, X_{s,n_s}), \gamma = (m_1, \dots, m_s)^t \in \mathbb{R}^s,$$

Designmatrix:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$ , wobei in der ersten Zeile  $n_1$  viele Einsen stehen und in Zeile

$2$   $n_2$  viele Einsen stehen usw;  $L$  der Spaltenraum von  $A$ . Somit ist  $X = A\gamma + \sqrt{v}\xi$  mit  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)^{\otimes n}$

Es gilt:

$$(A^t A) = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n_s \end{pmatrix}$$

und

$$A^t X = (n_1 M_1, \dots, n_s M_s)^t$$

mit  $M_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} X_{i,k}$ ,  $\hat{\gamma} = (A^t A)^{-1} A^t X = (M_1, \dots, M_s)^t$ ,

$$\begin{aligned} V^* &= \frac{1}{n-s} |X - A\hat{\gamma}|^2 \\ &= \frac{1}{n-s} |X - \underbrace{(M_1, \dots, M_1)}_{n_1} \underbrace{(M_2, \dots, M_2)}_{n_2} \dots \underbrace{(M_s, \dots, M_s)}_{n_s}|^2 \\ &= \frac{1}{n-s} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{n_i} (X_{i,k} - M_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^s \frac{n_i - 1}{n-s} V_i^* \end{aligned}$$

mit  $V_i^* = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{k=1}^{n_i} (X_{i,k} - M_i)^2$ .

Schreibweise:  $V_{iG}^* := V_i^*$ , „Varianz innerhalb der Gruppen“

### Bemerkung: „Streuungszerlegung“

Mit  $M := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{n_i} X_{i,k}$  ist

$$\begin{aligned} V_{\text{tot}}^* &:= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{n_i} (X_{i,k} - M)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} |X - M \cdot \mathbf{1}|^2 \\ &= \frac{1}{n-1} (|X - \Pi_L X|^2 + |\Pi_L X - M \cdot \mathbf{1}|^2), \end{aligned}$$

also

$$(n-1)V_{\text{tot}}^* = (n-s)V_{iG}^* + (s-1)V_{zG}^*$$

mit  $V_{zG}^* := \frac{1}{s-1} \sum_{i=1}^s n_i (M_i - M)^2 = \frac{1}{s-1} |\Pi_L X - M \cdot \mathbf{1}|^2$  („Varianz zwischen den Gruppen“).

#### 12.4.1. Satz: Konfidenzbereich für $\gamma = (m_1, \dots, m_s)^t$

Für  $\alpha \in (0, 1)$  ist

$$C := \left\{ \tilde{m} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_s) : \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s n_i (\tilde{m}_i - M_i)^2 < V_{iG}^* \cdot f_{s, n-s; 1-\alpha} \right\}$$

(wo  $f_{s, n-s; 1-\alpha} = (1-\alpha)$ -Quantil der Fisher $_{s, n-s}$ -Verteilung) ein Konfidenzbereich (oder Konfidenzellipsoid) zum Irrtumsniveau  $\alpha$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{(\gamma,v)}[\gamma \in C] &= \mathbf{P}_{(\gamma,v)} \left[ \frac{\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s n_i (\gamma_i - M_i)^2}{V_{iG}^*} < f_{s,n-s;1-\alpha} \right] \\
 &= \mathbf{P}_{(0,v)} \left[ \frac{\frac{1}{v} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s n_i (M_i)^2}{\frac{1}{v} V_{iG}^*} < f_{s,n-s;1-\alpha} \right] \\
 &= 1 - \alpha
 \end{aligned}$$

□

### 12.4.2. Satz: F-Test auf Gleichheit der Gruppenmittelwerte

$H = \{m \cdot \mathbf{1} : m \in \mathbb{R}\} \subset L(\subset \mathbb{R}^n)$ , (d.h.  $A\gamma \in H \iff m_1 = m_2 = \dots = m_s$ ).

Der Ablehnungsbereich

$$\{V_{zG}^* > f_{s-1,n-s;1-\alpha} V_{iG}^*\}$$

definiert einen Test von  $H_0 : m_1 = \dots = m_s$  gegen  $H_1$  : “nicht alle  $m_i$  sind gleich“ zum Niveau  $\alpha$ .

**Beweis:**

Sei  $v > 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^s$  mit  $A\gamma \in H$ . Betrachte

$$\frac{V_{zG}^*}{V_{iG}^*} = \frac{\frac{1}{s-1} |\Pi_L X - \Pi_H X|^2}{\frac{1}{n-s} |X - \Pi_L X|^2}, \text{ dies ist unter } \mathbf{P}_{\gamma,v} \text{ Fisher}_{s-1,n-s}\text{-verteilt.}$$

### 12.4.3. Korollar: $t$ -Test auf Gleichheit der Mittelwerte für zwei ungepaarte (normalverteilte) Stichproben

Seien  $X_{1,1}, \dots, X_{1,n_1}$  u.i.v.  $\sim \mathcal{N}(m_1, v)$ ,  $X_{2,1}, \dots, X_{2,n_2}$  u.i.v.  $\sim \mathcal{N}(m_2, v)$  und

$$M_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} X_{1,k}, M_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} X_{2,k},$$

$$V_{iG}^* = \frac{1}{n-2} \left( \sum_{k=1}^{n_1} (X_{1,k} - M_1)^2 + \sum_{k=1}^{n_2} (X_{2,k} - M_2)^2 \right).$$

Der Ablehnungsbereich

$$\left\{ \frac{|M_1 - M_2|}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}) V_{iG}^*}} > t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

(wo  $t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} = (1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Student'schen  $t$ -Verteilung mit  $n - 2$  Freiheitsgraden) definiert einen Test von  $H_0 : m_1 = m_2$  gegen  $H_1 : m_1 \neq m_2$  zum Niveau  $\alpha$ .

**Beweis:**

Es ist  $M = \frac{1}{n_1+n_2} \left( \sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i} + \sum_{i=1}^{n_2} X_{2,i} \right) = \frac{n_1}{n_1+n_2} M_1 + \frac{n_2}{n_1+n_2} M_2$ , also  
 $V_{zG}^* = n_1(M_1 - M)^2 + n_2(M_2 - M)^2 = \frac{(M_1 - M_2)^2}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ . Nach obigem ist

$$\frac{V_{zG}^*}{V_{iG}^*} = \frac{(M_1 - M_2)^2}{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) V_{iG}^*}$$

Fisher<sub>1,n-2</sub>-verteilt, und die „symmetrisch signierte“ Wurzel einer Fisher<sub>1,n-2</sub>-verteilten Zufallsgröße ist  $t_{n-2}$ -verteilt.

## 12.5. Zweifaktorielle Varianzanalyse

Modell: Es gibt 2 Faktoren mit  $s_1$  bzw.  $s_2$  „Stufen“.  $X_{i,j,k}$  ist die  $k$ -te Beobachtung zur Stufe  $i$  des ersten Faktors und Stufe  $j$  des 2. Faktors.

$$X_{i,j,k} = m_{i,j} + \sqrt{v} \xi_{i,j,k}, i \in \{1, \dots, s_1\}, j \in \{1, \dots, s_2\}, 1 \leq k \leq n_{i,j}$$

(insgesamt:  $n = \sum_{i=1}^{s_1} \sum_{j=1}^{s_2} n_{i,j}, s = s_1 \cdot s_2$ ).

$$m_{\cdot,j} = \frac{1}{s} \sum_{i,j} m_{i,j}, m_{i,\cdot} = \frac{1}{s_2} \sum_{j=1}^{s_2} m_{i,j}, m_{\cdot,j} = \frac{1}{s_1} \sum_{i=1}^{s_1} m_{i,j}$$

Schreibe  $m_{i,j} = m_{\cdot,\cdot} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j}$  mit  $\alpha_i = m_{i,\cdot} - m_{\cdot,\cdot}$  ( $i$ -ter Zeileneffekt) und  $\beta_j = m_{\cdot,j} - m_{\cdot,\cdot}$  ( $j$ -ter Spalteneffekt), sowie  $\gamma_{i,j} = m_{i,j} - m_{i,\cdot} - m_{\cdot,j} + m_{\cdot,\cdot}$  („Wechselwirkungseffekt“ bei  $(i, j)$ ) mit Designmatrix  $A$  und ihrem Spaltenraum  $L$ .

### 12.5.1. Beispiel:

Sei  $\tilde{H} = \{Am' : m' \in \mathbb{R}^s : m'_{i,j} = m'_{i,\cdot} + m'_{\cdot,j}\}$ , und wir nehmen an, dass  $n_{ij} = \ell$  für alle  $i, j$ .

(Übung:  $(\Pi_{\tilde{H}} X)_{i,j,k} = (M_{i,j} - M_{i,\cdot} - M_{\cdot,j} + M_{\cdot,\cdot}), i \in \{1, \dots, s_1\}, j \in \{1, \dots, s_2\}, 1 \leq k \leq n_{i,j}$ )

Betrachte nun

$$|\Pi_L X - \Pi_{\tilde{H}} X|^2 = \sum_{i,j} n_{i,j} (M_{\cdot,\cdot} - M_{i,\cdot} - M_{\cdot,j})^2 =: (s_1 \cdot s_2 - (s_1 + s_2 - 1)) V_{zG^{1-2}}^* = (s_1 - 1) \cdot (s_2 - 1) V_{zG^{1-2}}^*,$$

der Ablehnungsbereich

$$\left\{ \frac{V_{zG^{1-2}}^*}{V_{iG}^*} > f_{(s_1-1)(s_2-1), n-s_1 \cdot s_2; 1-\alpha} \right\}$$

definiert einen Test für  $H_0 : \gamma_{i,j} \equiv 0$  (keine Wechselwirkungseffekte) gegen  $H_1 : \gamma_{i,j} \neq 0$ .



**Teil II.**

**Finanzmathematik - Mathematische  
Modelle und Methoden zur Bewertung  
von Derivaten**





# 13. Einführung in die Finanzmathematik

## Beispiele:

Eine Aktie habe heute den Wert  $S_0 = 400$  Euro, zu einem zukünftigen Zeitpunkt  $T$  gelte

$$S_T = \begin{cases} 500 \text{ Euro} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p = \frac{1}{2}, \\ 350 \text{ Euro} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

## 13.1. Europäische Call- und Put-Option

Eine europäische Call-Option auf die Aktie (mit Fälligkeit („maturity“)  $T$ ) und Ausübungspreis („strike“)  $K$ : Das Recht (aber nicht die Pflicht), zum Zeitpunkt  $T$  eine Aktie zum Preis  $K$  zu kaufen.

Wert des Calls zum Zeitpunkt  $T$ :

$$C_T = (S_T - K)_+$$

Analog: Europäische Put-Option, Wert zur Zeit  $T$ :

$$P_T = (K - S_T)_+$$

### Was ist der „faire“ Preis der Call-Option?

Beispiel:  $K = 440$  Euro.

„Naiver Ansatz“:  $\mathbf{E}[C_T] = \frac{1}{2}60\text{Euro} + \frac{1}{2}0\text{Euro} = 30\text{Euro}$

### Beobachtung: („Hedging strategy“)

Mit einem Startkapital von 20 Euro kann man das Auszahlungsprofil der Call-Option replizieren.

Zeit 0: Leihe 140 Euro, kaufe 0.4 Aktien (zahle dafür  $0.4 \cdot 400\text{Euro} = 20\text{Euro} + 140\text{Euro}$ )

Zeit  $T$ : Wenn  $S_T = 500\text{Euro}$ : Wert des Portfolios:  $0.4 \cdot 500\text{Euro} - 140\text{Euro} = 60\text{Euro}$

Wenn  $S_T = 350\text{Euro}$ : Wert des Portfolios:  $0.4 \cdot 350\text{Euro} - 140\text{Euro} = 0$

Demnach ist der faire Preis  $\pi(C) = 20\text{Euro}$ , sonst gäbe es eine Arbitrage-Möglichkeit in diesem Markt.

### Beobachtung:

$\pi(C) = \mathbf{E}_{p^*}[C_T]$  für  $p^* = \frac{1}{3}$ .

Betrachte einen allgemeinen „contingent claim“  $H$  mit Fälligkeit  $T$ ,

$$H_T = \begin{cases} H^b & \text{wenn } S_T = 500\text{Euro} \\ H^a & \text{wenn } S_T = 350\text{Euro} \end{cases}$$

**Beobachtung:**

$\pi(H) = \mathbf{E}_{p^*}[H_T] = p^*H^b + (1 - p^*)H^a$ , denn betrachte folgende Handelsstrategie:

Zur Zeit 0 kaufe

$$\Theta^1 := \frac{H^b - H^a}{150\text{Euro}} \text{ Aktien}$$

und verleihe

$$\Theta^0 = H^b - \frac{H^b - H^a}{150\text{Euro}} \cdot 500\text{Euro}$$

Wert des Portfolios zur Zeit  $T$ :

$$\Theta^1 S_T + \Theta^0 = \begin{cases} \frac{H^b - H^a}{150} 500 + H^b - \frac{H^b - H^a}{150} 500 = H^b & , \text{ wenn } S_T = 500\text{Euro} \\ \frac{H^b - H^a}{150} 350 + H^b - \frac{H^b - H^a}{150} 500 = H^a & , \text{ wenn } S_T = 350\text{Euro} \end{cases}$$

Wert des Portfolios zur Zeit 0:

$$\Theta^1 \cdot 400\text{Euro} + \Theta^0 = \frac{H^b - H^a}{150} \cdot 400 + H^b - \frac{H^b - H^a}{150} 500 = \frac{1}{3}H^b + \frac{2}{3}H^a = \mathbf{E}_{p^*}[H_T] = \pi(H)$$

**Beobachtung:**

$$\mathbf{E}_{p^*}\left[\frac{S_T}{1}\right] = \frac{1}{3}500\text{Euro} + \frac{2}{3}350\text{Euro} = 400\text{Euro} = \frac{S_0}{1}$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P^*$  heißt auch „risikoneutrales Maß“ oder „Äquivalentes Martingalmaß“.

**13.2. Binomialmodell:**

(i) Eine Periode:

Handelszeitpunkte  $\mathbb{T} = \{0, 1\}$ .

Wertpapiere:

- Bankkonto mit Zinssatz  $r \geq 0$ :

$$S_0^0 = 1, S_1^0 = (1 + r)$$

- risikobehaftetes Wertpapier:

$$S_0^1 \text{ fest, } S_1^1 \text{ ZV mit } \mathbf{P}[S_1^1 = \overbrace{S_0^1(1+b)}^{S^b}] = p = 1 - \mathbf{P}[S_1^1 = \overbrace{S_0^1(1+a)}^{S^a}]$$

Wir nehmen an, dass  $a < r < b$ , denn wenn  $r < \min\{a, b\}$  oder  $r > \max\{a, b\}$ , so gibt es Arbitrage im Modell.

Portfolio:

$\Theta_t^0 :=$  Betrag auf Bankkonto im Intervall  $(t - 1, t]$

$\Theta_t^1 :=$  Einheiten der risikobehafteten Anlage im Intervall  $(t - 1, t]$

Wertprozess:  $V_0 = \Theta_1^0 \cdot S_0^0 + \Theta_1^1 S_0^1$ ,  $V_t = \Theta_t^0 S_t^0 + \Theta_t^1 S_t$ , ( $t \geq 1$ )

Betrachte einen contingent claim  $H$  mit  $H_1 = \begin{cases} H^a & \text{wenn } S_1^1 = S_0^1(1+a), \\ H^b & \text{wenn } S_1^1 = S_0^1(1+b) \end{cases}$ .

Gesucht: Hedging-Strategie und fairer Preis  $\pi(H) := V_0$  (Wert zur Zeit  $t = 0$  des replizierenden Portfolios).

$$H^b = (1+r)V_0 + \Theta_1^1((1+b)S_0^1 - (1+r)S_0^1)$$

$$H^a = (1+r)V_0 + \Theta_1^1((1+a)S_0^1 - (1+r)S_0^1)$$

Dann

$$\Theta_1^1 = \frac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1} = \frac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1} \text{ „Delta“}$$

$$H^b = (1+r)\Theta_1^0 + \frac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1}(1+b)S_0^1 \Rightarrow \Theta_1^0 = \frac{1}{1+r} \frac{(1+b)H^a - (1+a)H^b}{b-a}$$

$$V_0 = \frac{1}{1+r} \left( \underbrace{H^a \frac{b-r}{b-a}}_{1-p^*} + \underbrace{H^b \cdot \frac{r-a}{b-a}}_{=:p^*} \right) = \frac{1}{1+r} \mathbf{E}_{p^*}[H_1] = \mathbf{E}_{p^*} \left[ \frac{H_1}{S_1^0} \right]$$

### 13.2.1. Mehrperioden-Binomialmodell (CRR(=Cox-Ross-Rubinstein)-Modell (1979))

Sei  $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, T\}$  und es gebe zwei Wertpapiere:

(i)  $S_t^0 = (1+r)^t$

(ii)  $S_t^1 = S_0^1 \cdot X_1 \cdots X_t$ , wo  $X_1, \dots, X_T$  unabhängig mit  $\mathbf{P}[X_i = 1+b] = p = 1 - \mathbf{P}[X_i = 1+a]$  mit  $-1 < a < r < b$  und  $0 < p < 1$

Sei  $\mathcal{F}_t = \sigma(S_u^i, 1 \leq u \leq t, i \in \{0, 1\}) (= \sigma(X_1, \dots, X_t))$ . Es gilt  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$ , d.h. die Familie  $(\mathcal{F}_t)_{t=0, \dots, T}$  ist eine *Filtration*.

**Gegeben:** Eine europäische Option  $H$  mit Fälligkeit  $T$  und Basiswertpapier  $S^1$ , d.h.  $H_T = f(S_T^1)$ .

**Gesucht:** Fairer Preis, zugehörige selbstfinanzierende Replikationsstrategie.

Unter dem Maß  $\mathbf{Q}$  sei  $X_1, \dots, X_T$  unabhängig verteilt mit

$$\mathbf{Q}[X_i = 1+b] = p^* = 1 - \mathbf{Q}[X_i = 1+a], \quad p^* := \frac{r-a}{b-a}.$$

$\mathbf{Q}$  heißt „äquivalentes Martingalmaß“ oder „risikoneutrales Maß“.

### 13.2.2. Beobachtung:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \frac{S_{t+1}^1}{S_{t+1}^0} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \frac{S_0^1 X_1 \cdots X_{t+1}}{(1+r)S_t^0} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{S_0^1 X_1 \cdots X_t}{S_t^0} \overbrace{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \frac{X_{t+1}}{(1+r)} \middle| \mathcal{F}_t \right]}^{=1} = \frac{S_t^1}{S_t^0},$$

---


$$1 \cdot \frac{1}{r+1} \cdot \left( \frac{r-a}{b-a}(1+b) + \frac{b-r}{b-a}(1+a) \right) = \frac{1+r-b-a-ab+ba+ab-ra}{(1+r)(b-a)} = 1$$

d.h.  $\left(\frac{S_t^1}{S_t^0}\right)_{t=0,1,\dots,T}$  ist  $(\mathbf{Q}, (\mathcal{F}_t))$ -Martingal.

Sei  $H_t$  der Wert der Option zur Zeit  $t \leq T$  (Schreibe  $H_t^{x_1, \dots, x_t}$  für den Wert auf  $\{X_1 = x_1, \dots, X_T = x_t\}$ ).

Notiere Portfolio folgendermaßen:

$\Theta_t^1 \dots$  Anzahl  $S^1$ , die im Intervall  $(t-1, t]$  gehalten werden,

$\Theta_t^0 \dots$  Anzahl  $S^0$ , die im Intervall  $(t-1, t]$  gehalten werden.

Dann ist

$$V_t = \Theta_t^1 S_t^1 + \Theta_t^0 S_t^0 \quad (\text{notiere } V_0 = \Theta_1^1 S_0^1 + \Theta_1^0 S_0^0)$$

der Wert des Portfolios zur Zeit  $t$ .

Es soll die sogenannte „Selbstfinanzierungsbedingung“ gelten:

$$\Theta_{t+1}^1 S_t^1 + \Theta_{t+1}^0 S_t^0 = V_t = \Theta_t^1 S_t^1 + \Theta_t^0 S_t^0, \quad t = 1, \dots, T-1,$$

d.h. während der Laufzeit der Option wird dem Portfolio weder Kapital entnommen noch zugeführt.

Die Strategie soll *prävisibel* sein, d.h.  $\Theta_t^0, \Theta_t^1$  sind  $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbar — die Investitionsentscheidungen über das Zeitintervall  $(t-1, t]$  müssen zum Zeitpunkt  $t-1$  getroffen werden, ohne „Blick in die Zukunft“.

### 13.2.3. Satz:

Im CRR-Modell gilt

$$\frac{H_t}{S_t^0} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \frac{H_T}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (t = 0, \dots, T),$$

die zugehörige (selbstfinanzierende) duplizierende Handelsstrategie hat folgende Form (auf dem Ereignis  $\{X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}\}$ ):

$$\Theta_t^1 = \frac{H_t^{x_1, \dots, x_{t-1}, 1+b} - H_t^{x_1, \dots, x_{t-1}, 1+a}}{(b-a)S_{t-1}^1}, \quad \Theta_t^0 = \frac{1}{1+r} \frac{(1+b)H_t^{x_1, \dots, x_{t-1}, 1+b} - (1+a)H_t^{x_1, \dots, x_{t-1}, 1+a}}{(b-a)S_{t-1}^0}.$$

**Beobachtung:**

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \frac{H_{t+1}}{S_{t+1}^0} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \frac{H_T}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \frac{H_T}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{H_t}{S_t^0},$$

d.h.  $(H_t/S_t^0)_{t=0,1,\dots,T}$  ist ein  $\mathbf{Q}$ -Martingal.

### Beweis des Satzes

Beweis durch Rückwärtsinduktion:

Zum Zeitpunkt  $T-1$ , auf dem Ereignis  $\{X_1 = x_1, \dots, X_{T-1} = x_{T-1}\}$  handelt es sich um ein „1-Perioden-(Binomial-)Modell“ (schlage Formeln vom letzten Modell nach).

Angenommen die Behauptung gilt für  $t, t+1, \dots, T-1$ : Fasse  $\tilde{H}_t = H_t$  als Claim in einem 1-Perioden-Modell (von  $t-1$  nach  $t$ ) auf.

Auf  $\{X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}\}$ : Kaufe

$$\Theta_t^1 := \frac{H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+b} - H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+a}}{(b-a)S_{t-1}^1}$$

viele Einheiten  $S^1$  und

$$\Theta_t^0 := \frac{1}{r+1} \frac{(1+b)H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+a} - (1+a)H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+b}}{(b-a)S_{t-1}^0}$$

viele Einheiten von  $S^0$ .

Wert dieses Portfolios zur Zeit  $t$ :

- Falls  $S_t^1 = S_{t-1}^1 \cdot (1+b)$ :

$$\begin{aligned} & V_t \\ = & S_{t-1}^1(1+b) \frac{H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+b} - H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+a}}{(b-a)S_{t-1}^1} \\ & + S_{t-1}^0(1+r) \frac{(1+b)H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+a} - (1+a)H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+b}}{(b-a)S_{t-1}^0} \\ = & \frac{(1+b)H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+b} - (1+b)H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+a} + (1+b)H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+a} - (1+a)H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+b}}{b-a} \\ = & H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+b}. \end{aligned}$$

- Ebenso falls  $S_t^1 = S_{t-1}^1 \cdot (1+a)$ :  $V_t = H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, 1+a}$ .

Aus den Ergebnissen des Ein-Perioden-Modells folgt darüberhinaus, dass

$$H_{t-1}^{X_1, \dots, X_{t-1}} = \frac{1}{1+r} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[H_t | \mathcal{F}_{t-1}].$$

Zur Selbstfinanzierungs-Bedingung: Wir müssen zeigen, dass

$$\Theta_{t+1}^1 S_t^1 + \Theta_{t+1}^0 S_t^0 \stackrel{!}{=} V_t = \Theta_t^1 S_t^1 + \Theta_t^0 S_t^0.$$

Rechte Seite  $= H_t$  (denn das Portfolio repliziert die Option  $H$ ).

Die linke Seite ist

$$\begin{aligned} & \frac{1+r}{1+r} \frac{H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, X_t, 1+b} - H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, X_t, 1+a}}{(b-a)S_t^1} S_t^1 \\ & + \frac{1}{1+r} \frac{(1+b)H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, X_t, 1+a} - (1+a)H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, X_t, 1+b}}{(b-a)S_t^0} S_t^0 \\ = & \frac{1}{1+r} \frac{(r-a)H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, X_t, 1+b} + (b-r)H_t^{X_1, \dots, X_{t-1}, X_t, 1+a}}{b-a} \\ = & \frac{1}{1+r} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[H_{t+1} | \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

was nach Induktionsvoraussetzung  $= H_t$  ist.

□

### 13.2.4. Beispiel: Europäische Call-Option

$C_T = (S_T^1 - K)_+$ ,  $S_T^1 = S_0^1(1+b)^N(1+a)^{T-N}$ , wo  $N = |\{i \leq T : X_i = 1+b\}|$ , unter  $\mathbf{Q}$  ist  $N$   $Bin(T, p^*)$ -verteilt.

Sei  $A = \min\{n \in \mathbb{Z} : S_0^1(1+b)^n(1+a)^{T-n} > K\}$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1+r)^T} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [(S_0^1(1+b)^N(1+a)^{T-N} - K)_+] \\ &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{n=A}^T \binom{T}{n} (p^*)^n (1-p^*)^{T-n} (S_0^1(1+b)^n(1+a)^{T-n} - K) \\ &= S_0^1 Bin(T, p')(\{A, A+1, \dots, T\}) - \frac{1}{(1+r)^T} K \cdot Bin(T, p^*)(\{A, \dots, T\}) \end{aligned}$$

mit  $p' = \frac{p^*(1+b)}{1+r}$

### 13.2.5. Bemerkung: Call-Put-Parität

$C_T = (S_T^1 - K)_+$ ,  $P_T = (K - S_T^1)_+$ , also  $C_T - P_T = S_T^1 - K$ , d.h. fairer Preis wäre:

$$\pi(C_T - P_T) = \pi(C_T) - \pi(P_T) = \pi(S_T^1 - K) = S_0^1 - (1+r)^{-T} K.$$

(Der Vertrag mit Auszahlungsprofil  $S_T^1 - K$  heißt „Forward“.) Demnach bestimmt der Preis des europäischen Calls den des Puts mit demselben Ausübungspreis und umgekehrt.

## 13.3. Black-Scholes-Formel

(Fisher Black, Merton Scholes 1973, Robert Merton 1973; Merton und Scholes haben für diese Arbeiten 1997 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhalten.)

Sei  $T$  der Zeithorizont,  $N \cdot T$  die Anzahl der Handelsperioden ( $i$ -te Periode entspricht „Realzeitintervall“  $(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N})$ ),  $r$  die instantane Zinsrate  $\geq 0$

$r_N := \frac{r}{N}$ ,  $a_N := -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ ,  $b_N := \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ ,  $p_N := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\sigma\sqrt{N}}$ , wo  $\sigma > 0$  die „Volatilität“,  $\mu \in \mathbb{R}$  der „Renditeparameter“,  $S_0^1$  sei fest gegebener Wert.

#### Beobachtung:

$$S_{NT,N}^0 = (1+r_N)^{NT} = \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{NT} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{rT}$$

Betrachte

$$\begin{aligned} S_{tN,N}^1 &= S_0^1 \cdot \prod_{i=1}^{tN} X_i^{(N)} \quad \text{für } tN \in \mathbb{N}_0 \\ &= S_0^1 \cdot \prod_{i=1}^{tN} (1 + R_i^{(N)})^{(N)} \text{ mit } R_i^{(N)} = X_i^{(N)} - 1 = \frac{S_{i,N}^1 - S_{i-1,N}^1}{S_{i-1,N}^1} \\ &\quad \text{„Rendite der Aktie über das } i\text{-te Handelsintervall } \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right)\text{“} \\ &= S_0^1 \exp\left(\sum_{i=1}^{tN} \log(1 + R_i^{(N)})\right) \end{aligned}$$

**Beobachtung:**

$$R_i^{(N)} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\sigma\sqrt{N}} \\ -\frac{\sigma}{\sqrt{N}} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\sigma\sqrt{N}} \end{cases}$$

und  $\log(1+r) = r - \frac{1}{2}r^2 + O(r^3)$  für  $r$  aus einer Umgebung der 0, also

$$\log\left(\frac{S_{tN,N}^1}{S_0^1}\right) = \sum_{i=1}^{Nt} \left( R_i^{(N)} - \frac{1}{2}(R_i^{(N)})^2 \right) + \text{Rest}_{N,t}$$

mit

$$|\text{Rest}_{N,t}| \leq \frac{C}{\sqrt{N}} \text{ für eine Konstante } C.$$

Es gilt

$$\mathbf{E}[R_i^{(N)}] = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mu}{\sigma\sqrt{N}} \right) \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\mu}{\sigma\sqrt{N}} \right) \frac{-\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{\mu}{N}$$

und

$$\mathbf{E}[(R_i^{(N)})^2] = \frac{\sigma^2}{N}, \quad \text{Var}(R_i^{(N)}) = \frac{\sigma^2}{N} - \frac{\mu^2}{N^2},$$

also

$$\mathbf{E} \left[ R_i^{(N)} - \frac{1}{2}(R_i^{(N)})^2 \right] = \frac{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2}{N},$$

$$\text{Var} \left( R_i^{(N)} - \frac{1}{2}(R_i^{(N)})^2 \right) = \text{Var}(R_i^{(N)}) = \frac{\sigma^2}{N} - \frac{\mu^2}{N^2}.$$

Demnach konvergiert  $S_{[Nt],N}^1$  in Verteilung gegen

$$S_0^1 \exp \left( \sigma B_t + t \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \right),$$

wo  $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

Es gilt

$$p_N^* = \frac{r_N - a_N}{b_N - a_N} = \frac{\frac{r}{N} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}}{\frac{2\sigma}{\sqrt{N}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{r}{\sigma\sqrt{N}}.$$

Demnach konvergiert unter  $\mathbf{P}_N^*$  mit  $N \rightarrow \infty$

$$S_{NT,N}^1 \xrightarrow{d} S_0^1 \exp \left( \sigma B_T + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right),$$

wobei  $B_T \sim \mathcal{N}(0, T)$

### 13.3.1. Satz:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetiges, beschränktes Auszahlungsprofil einer Option  $H_{T,N} = f(S_{NT,N}^1)$ . Die Folge  $\pi_N(H_{T,N})$  der fairen Preise konvergiert gegen

$$e^{-rT} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f \left( S_0^1 e^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

### 13.3.2. Korollar: Black-Scholes-Formel für den Preis eines Calls

$$f(s) = (s - K)_+,$$

$$\begin{aligned} v(x, T) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (xe^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \frac{1}{2}\sigma^2T} - K)_+ \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= x\Phi(d_+(x, T)) - e^{-rT}K\Phi(d_-(x, T)) \end{aligned}$$

mit  $d_-(x, T) = \frac{\log \frac{x}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ ,  $d_+(x, T) = d_-(x, T) + \sigma\sqrt{T} = \frac{\log \frac{x}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$  und  $\Phi$  die Verteilungsfunktion von  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Bemerkung:** Das Auszahlungsprofil des Calls ist nicht beschränkt. Um Satz 13.3.1 wörtlich anzuwenden, betrachte zunächst den entsprechenden Put, dessen Auszahlungsprofil beschränkt ist, und benutze dann die Call-Put-Parität.

## 13.4. Fundamentalsatz der Preistheorie (in endlichen Märkten)

### 13.4.1. Marktmodell

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum mit  $|\Omega| < \infty$ ,  $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, T\}$  eine endliche Menge von Handelszeiten und  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  die zugehörige Filtration, d.h.  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$  und  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ . Weiter seien  $S^0, S^1, \dots, S^d$  die  $d + 1$  Wertpapiere mit  $S_t^i =$  Wert des  $i$ -ten Wertpapiers zur Zeit  $t$ , welches positive  $\mathcal{F}_t$ -messbare Zufallsvariablen sind, d.h.  $(S_t^i)_{t \in \mathbb{T}}$  ist  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ -adaptiert.

$S_t^0$  sei  $> 0$  und deterministisch (eine risikolose Anlage).

Betrachte

$$\bar{S}_t^i := \frac{S_t^i}{S_t^0} \quad (\text{„diskontierte“ Preise}).$$

Wir benutzen  $S^0$  als „Numéraire.“

**Handelsstrategien:** Ein stochastischer Prozess

$$(\Theta_t)_{t=1, \dots, T} = ((\Theta_t^i)_{t=1, \dots, T}, i = 0, \dots, d)$$

ist eine Handelsstrategie, wenn  $\Theta_t^i$   $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbar ist (für  $i = 0, \dots, d; t = 1, \dots, T$ ). Man nennt  $((\Theta_t^i)_{t=1, \dots, T}, i = 0, \dots, d)$  dann *prävisibel*.

**Interpretation:** Halte  $\Theta_t^i$  Einheiten von Wertpapier  $i$  über das Intervall  $(t - 1, t]$ .

**Wertprozess:**  $V_t(\Theta) = \langle \Theta_t, S_t \rangle = \sum_{i=0}^d \Theta_t^i S_t^i$ ,  $t = 1, \dots, T$  mit  $V_0(\Theta) = \Theta_1 \cdot S_0$

**Zugewinnprozess:**  $G_0(\Theta) = 0$  und  $G_t(\Theta) = \sum_{n=1}^t \langle \Theta_n, \Delta S_n \rangle$  mit  $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$



### 13.4.2. Definition: selbstfinanzierend

Eine Handelstrategie heißt *selbstfinanzierend*, wenn

$$V_t(\Theta) = V_0(\Theta) + G_t(\Theta) \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

gilt. Sei  $W$  die Menge der selbstfinanzierenden Handelstrategien.

#### Bemerkung:

- (i)  $W$  ist ein Vektorraum.
- (ii)  $\Theta \in W \iff \langle \Delta\Theta_t, S_{t-1} \rangle = 0 \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$   
 $\iff \langle \Delta\Theta_t, \bar{S}_{t-1} \rangle = 0 \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$
- (iii)

$$\bar{V}_t(\Theta) = \frac{V_t(\Theta)}{S_t^0} = \Theta_t^0 + \sum_{i=1}^d \Theta_t^i \bar{S}_t^i = \bar{V}_0(\Theta) + \sum_{s=1}^t \sum_{i=1}^d \Theta_s^i \Delta \bar{S}_s^i,$$

also ist

$$\Theta_t^0 = \bar{V}_0(\Theta) + \sum_{s=1}^t \sum_{i=1}^d \Theta_s^i \Delta \bar{S}_s^i - \sum_{i=1}^d \Theta_t^i \bar{S}_t^i,$$

d.h. für eine selbstfinanzierende Handelstrategie genügt es,  $V_0(\Theta)$  und  $\Theta^1, \dots, \Theta^d$  festzulegen.

#### Beweis der Bemerkung:

Zu (ii):

$$\begin{aligned} \langle \Delta\Theta_t, S_{t-1} \rangle &= \sum_{i=0}^d (\Theta_t^i - \Theta_{t-1}^i) S_{t-1}^i \\ &= \sum_{i=0}^d \Theta_t^i (S_t^i - S_t^i + S_{t-1}^i) - \sum_{i=0}^d \Theta_{t-1}^i S_{t-1}^i \\ &= V_t(\Theta) - \Delta G_t(\Theta) - V_{t-1}(\Theta) \end{aligned}$$

### 13.4.3. Definition: (duplizierbarer) Claim, Hedge, vollständiges Marktmodell, Arbitrage

Eine Zufallsvariable  $H$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , aufgefasst als Auszahlung zum Zeitpunkt  $T$  heißt ein *Claim*.  $H$  heißt *duplizierbar* (replizierbar, "attainable"), wenn es  $\Theta \in W$  gibt mit  $V_T(\Theta) = H$ .

Ein solches  $\Theta$  heißt ein *Hedge* für  $H$ .

Ein Marktmodell heißt *vollständig*, wenn jedes  $H$  duplizierbar ist.

Eine *Arbitragemöglichkeit* ist eine selbstfinanzierende Handelstrategie mit  $V_0(\Theta) = 0, V_T(\Theta) \geq 0$  und  $\mathbf{P}[V_T(\Theta) > 0] > 0$ . Ein Markt(-modell) heißt *arbitragefrei*, wenn es keine Arbitragemöglichkeiten gibt.

Ist  $H$  ein Claim,  $(H_t)_{t \in \mathbb{T}}$  ein adaptierter stochastischer Prozess mit  $H_T = H$ , so dass der um  $S_t^{d+1} := (H_t)$  erweiterte Markt arbitragefrei ist, so heißt  $(H_t)$  (ein) *Arbitragepreisprozess* für  $H$ ,  $\pi((H)_t) := H_0$  ein *Arbitragepreis*.

**Beobachtung:**

Sei der Markt arbitragefrei und  $\Theta \in W$  mit  $V_T(\Theta) = 0$ . Dann gilt  $V_t(\Theta) = 0 \forall t \in \mathbb{T}$ .

**Beweis der Beobachtung:**

Angenommen es gäbe ein  $t \in \mathbb{T}$  und ein  $c < 0$ , so dass  $\mathbf{P}[V_t(\Theta) = c] > 0$ , dann beobachte den Markt bis  $t$  und steige in den Markt ein, sofern  $V_t(\Theta) = c$ , verfolge dann  $\Theta$  bis  $T$ . Dies ergibt dann den sicheren Gewinn  $(-c) \cdot \frac{S_0^0}{S_t^0}$ , im Widerspruch zur angenommenen Arbitragefreiheit.

Analog, wenn  $c > 0$ : Verfolge  $\Theta' = -\Theta$ .

**13.4.4. Korollar:**

In einem arbitragefreien Markt ist der Arbitrageprozess eines replizierbaren Claims  $H$  eindeutig festgelegt (als Wertprozess des Hedge).

**13.4.5. Definition: Äquivalentes Martingalmaß**

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{Q}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  heißt ein *äquivalentes Martingalmaß*, wenn  $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$ , d.h.  $\mathbf{P}[\{\omega\}] > 0 \iff \mathbf{Q}[\{\omega\}] > 0 \forall \omega \in \Omega$  in diesem Kontext, und jedes  $(\bar{S}_t^i)_{t \in \mathbb{T}}$  ein  $\mathbf{Q}$ -Martingal ist,  $i = 0, 1, \dots, d$ .

$\mathcal{P}^* := \{\mathbf{Q} : \mathbf{Q} \text{ ist äquivalentes Martingalmaß}\}$

**13.4.6. Beobachtung:**

Sei  $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}^*$ ,  $\Theta \in W$ , dann ist  $(\bar{V}_t(\Theta))_{t \in \mathbb{T}}$  ein  $\mathbf{Q}$ -Martingal, denn

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\bar{V}_t(\Theta) - \bar{V}_{t-1}(\Theta) | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \sum_{i=0}^d \Theta_t^i (\bar{S}_t^i - \bar{S}_{t-1}^i) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = \sum_{i=0}^d \Theta_t^i \underbrace{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [\bar{S}_t^i - \bar{S}_{t-1}^i | \mathcal{F}_{t-1}]}_{=0} = 0$$

**13.4.7. Fundamentalsatz der Preistheorie:**

Das Marktmodell ist arbitragefrei  $\iff |\mathcal{P}^*| \geq 1$ .

Das Marktmodell ist arbitragefrei und vollständig  $\Rightarrow |\mathcal{P}^*| = 1$ .

**Beweis:**

Sei  $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}^*$ ,  $\Theta$  selbstfinanzierende Handelsstrategie mit  $V_T(\Theta) \geq 0$  und  $\mathbf{P}[V_T(\Theta) > 0] > 0$ . Dann gilt  $\mathbf{Q}[V_T(\Theta) > 0] > 0$  und  $\frac{V_0(\Theta)}{S_0^0} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\frac{V_T(\Theta)}{S_T^0}] > 0$ , d.h. es gibt keine Arbitragemöglichkeit.

Sei der Markt arbitragefrei:

Betrachte  $U := \{\bar{V}_T(\Theta) : \Theta \in W, V_0(\Theta) = 0\} \subseteq \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) (\cong \mathbb{R}^{|\Omega|})$ ,

$C := \{X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) : X \geq 0, \mathbf{E}[X] = 1\}$ .

Beobachtung:  $U$  ist ein Untervektorraum,  $C$  ist konvex und kompakt als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{|\Omega|}$ . Aus Arbitragefreiheit folgt:  $U \cap C = \emptyset$ .

Nach dem Trennungssatz<sup>2</sup> gibt es  $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  mit  $\langle X, G \rangle = 0 \forall G \in U$  und  $\langle X, Y \rangle > 0$  für  $Y \in C$ .

Sei  $A \in \mathcal{F}$  (mit  $\mathbf{P}[A] > 0$ ),  $\frac{\mathbf{1}_A}{\mathbf{P}[A]} \in C$ , also  $\langle X, \frac{\mathbf{1}_A}{\mathbf{P}[A]} \rangle = \frac{1}{\mathbf{P}[A]} \mathbf{E}[X \cdot \mathbf{1}_A] > 0$ , d.h.  $X > 0$ .

Setze  $\mathbf{Q}[A] := \frac{1}{\mathbf{E}[X]} \mathbf{E}[X \cdot \mathbf{1}_A]$ , es ist  $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ .

Sei  $A \in \mathcal{F}_t$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$ , betrachte selbstfinanzierende Handelsstrategie  $\Theta$  mit  $\Theta_s^i = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{s > t\}}$ ,  $\Theta_s^j \equiv 0, j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$ .

$$\bar{V}_T(\Theta) - \bar{V}_t(\Theta) = \mathbf{1}_A(\bar{S}_T^i - \bar{S}_t^i) \in U,$$

demnach

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X, \bar{V}_T(\Theta) - \bar{V}_t(\Theta) \rangle \\ &= \mathbf{E}[X \cdot (\bar{V}_T(\Theta) - \bar{V}_t(\Theta))] \\ &= \mathbf{E}[X \cdot \mathbf{1}_A(\bar{S}_T^i - \bar{S}_t^i)] \\ &= \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\mathbf{1}_A(\bar{S}_T^i - \bar{S}_t^i)], \end{aligned}$$

d.h. unter  $\mathbf{Q}$  sind die  $\bar{S}^i$  Martingale.

Sei der Markt nun arbitragefrei und vollständig.

Sei  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{1}_A$  ist ein duplizierbarer Claim; also sei  $\Theta$  eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit  $V_T(\Theta) = \mathbf{1}_A$ .

Seien  $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \mathcal{P}^*$ .

$$\frac{V_0(\Theta)}{S_0^0} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \frac{V_T(\Theta)}{S_T^0} \right] = \frac{1}{S_T^0} \mathbf{Q}[A]$$

Aber auch

$$\frac{V_0(\Theta)}{S_0^0} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}'} \left[ \frac{V_T(\Theta)}{S_T^0} \right] = \frac{1}{S_T^0} \mathbf{Q}'[A],$$

also  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$ .

### Bemerkung und Beispiel:

Sei  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ,  $S_0^0 = S_1^0 = 1$ ,  $S_1^i = s_i$  auf Atom  $i$ ,  $\min\{s_1, s_2, s_3\} < 1 < \max\{s_1, s_2, s_3\}$ . Dieses Modell ist arbitragefrei, aber nicht vollständig (und es gibt viele äquivalente Martingalmaße).

---

<sup>2</sup>In diesem endlich-dimensionalen Kontext kann man leicht folgendermaßen argumentieren: Sei  $\pi_U : \mathbb{R}^{|\Omega|} \rightarrow U$  die orthogonale Projektion, dann ist  $\pi_U(C)$  kompakt, und es gibt  $c_0 \in C$ , so dass mit  $u_0 := \pi_U(c_0)$  gilt

$$\inf\{|u - c| : c \in C, u \in U\} = |u_0 - c_0| > 0.$$

Dann gilt für  $X := c_0 - u_0 (\neq 0)$ :  $\langle X, u \rangle = \langle c_0, u \rangle - \langle \pi_U(c_0), u \rangle = 0$  für alle  $u \in U$ ; für  $c \in C$  und  $\lambda \in [0, 1]$  ist  $c_0 + \lambda(c - c_0) \in C$  (Konvexität), somit  $|u_0 - (c_0 + \lambda(c - c_0))| \geq |u_0 - c_0| > 0$ . Also

$$0 \leq \frac{d}{d\lambda} |_{\lambda=0} |u_0 - (c_0 + \lambda(c - c_0))|^2 = -2\langle u_0 - c_0, c - c_0 \rangle = 2\langle X, c - c_0 \rangle,$$

folglich  $\langle X, c \rangle \geq \langle X, c_0 \rangle = \langle X, c_0 - u_0 \rangle = \langle X, X \rangle = |X|^2 > 0$  für jedes  $c \in C$ .



# 14. Exkurs: Stochastische Integration

## 14.0.8. Definition: Stochastischer Prozess

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  eine Filtration.

Eine Familie  $(X_t)_{t \geq 0}$  von (reellwertigen) Zufallsvariablen heißt ein *stochastischer Prozess*.

Wir wollen annehmen, dass die betreffenden Prozesse ( $\mathbf{P}$ -fast-sicher) càdlàg-Pfade (continue à droite, limite à gauche) haben.

$$\forall t \geq 0 : \lim_{h \searrow 0} X_{t+h} = X_t, \quad \forall t > 0 : \lim_{h \searrow 0} X_{t-h} =: X_{t-} \text{ existieren.}$$

Solche Prozesse nennen wir *regulär*. Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  heißt  $((\mathcal{F}_t)$ -) *adaptiert*, wenn  $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -messbar  $\forall t \geq 0$ . Eine Zufallsvariable  $\tau$  mit Werten in  $[0, \infty]$  heißt  $((\mathcal{F}_t)$ -) *Stoppzeit*, wenn  $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$   $\forall t \geq 0$ .

Für eine Stoppzeit  $\tau$  heißt

$$\mathcal{F}[\tau] = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0\}$$

die  $\tau$ -Vergangenheit.

### Bemerkung:

Ist  $X$  adaptiert und  $\tau$  eine Stoppzeit, so ist auch  $(X_{\min\{t, \tau\}})_{t \geq 0}$  adaptiert.

Seien  $\tau_1, \dots, \tau_k$  Stoppzeiten und  $L_1, \dots, L_k$  die Sprunglevel;  $L_i$  sei  $\mathcal{F}[\tau_i]$ -messbar.

Für einen regulären Prozess  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  der Gestalt  $Y_t = \sum_{i=1}^k L_i \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$  und einen adaptierten regulären Prozess  $X$  definieren wir einen stochastischen Prozess via

$$\int_0^t Y_- dX := \sum_{i=1}^k L_i (X_t - X_{\min\{t, \tau_i\}}) = \sum_{i=1}^k L_i \mathbb{1}_{\{\tau_i < t\}} (X_t - X_{\tau_i}), \quad t \geq 0.$$

Wir nennen dies ein *elementares stochastisches Integral*.

### 14.0.9. Bemerkung:

(i)  $\left( \int_0^t Y_- dX \right)_{t \geq 0}$  ist ein adaptierter, regulärer stochastischer Prozess.

(ii) Für (etwaige) Sprünge gilt:

$$\Delta \left( \int_0^t Y_- dX \right)_t = \int_0^t Y_- dX - \int_0^{t-} Y_- dX = Y_{t-} (X_t - X_{t-}) = Y_{t-} \Delta X_t$$

(iii) Wir schreiben  $H_t = Y_{t-}$  für die linksstetige Version von  $Y$ .

(iv) „kanonische“ Darstellung eines adaptierten linksstetigen  $H$  mit höchstens  $k$  Sprüngen:

$$\tau_0 := 0, \tau_i := \inf\{t > \tau_{i-1} : H_t \neq H_{\tau_{i-1}}\}, i = 1, 2, \dots, k \quad (\tau_{k+1} = \infty),$$

$H_t = \sum_{i=0}^k H_{\tau_i} \mathbb{1}_{\{\tau_i < t \leq \tau_{i+1}\}}$ . Das stochastische Integral  $\int H dX$  hat dann die Gestalt

$$\int_0^t H dX := \sum_i H_{\tau_i} (X_{\min\{\tau_{i+1}, t\}} - X_{\min\{\tau_i, t\}}).$$

**Definition:**

Für  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $d_{lg}(f, g) = \inf\{\varepsilon > 0 : |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$ , dies ist metrisiert die lokal gleichmäßige Konvergenz.

Wir schreiben  $X^n \xrightarrow{\text{stochastisch}} X$ , wenn  $\mathbf{P}[d_{lg}(X^n, X) > \varepsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

**14.0.10. Lemma:**

Das elementare stochastische Integral ist wohldefiniert und linear (in  $Y$ ).

**Beweis:**

Linearität ist klar, für die Wohldefiniertheit genügt es zu zeigen:

Sei  $Y_{t-} = H_t = \sum_{i=1}^k L_i \mathbb{1}_{\{\tau_i < t\}} = 0 \quad \forall t \geq 0$ , dann gilt auch  $\int_0^t H dX = 0$ .

Betrachte

$$\int_0^t H dX = \underbrace{Y_t}_{=0} X_t - \sum_{i=1}^k L_i X_{\tau_i} \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$$

ist konstant bis auf höchstens  $k$  Sprünge, die aufgrund von Bemerkung (ii) die Höhe 0 haben müssen, wegen  $\int_0^0 H dX = 0$ , also  $\int_0^t H dX = 0 \quad \forall t \geq 0$ .

**Beobachtung:**

Jeder adaptierte linksstetiger Prozess  $H$  kann durch eine Folge von elementaren Integranden approximiert werden: Sei  $\varepsilon_n > 0$  eine Nullfolge,

$$\tau_0^{(n)} := 0, \inf\{t > \tau_i^{(n)} : |H_{t+} - H_{\tau_i^{(n)}+}| > \varepsilon_n\} =: \tau_{i+1}^{(n)}, k_n \in \mathbb{N} \text{ so groß, dass } \mathbf{P}[\tau_{k_n}^{(n)} \geq \frac{1}{\varepsilon_n}] \leq \varepsilon_n.$$

Die Folge der approximierenden Prozesse:

$$H_t^n := \sum_{i=0}^{k_n-1} H_{\tau_i^{(n)}+} \mathbb{1}_{\{\tau_i^{(n)} < t \leq \tau_{i+1}^{(n)}\}}$$

erfüllt

$$\sup_{t < \tau_{k_n}^{(n)}} |H_t^n - H_t| \leq \varepsilon_n,$$

demnach

$$H^n \xrightarrow{\text{stoch.}} H.$$

### Bemerkung / Erinnerung:

Sind  $X_1, X_2, \dots, X$  reelle Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , dann gilt  $X_n \rightarrow X$  stochastisch  $\iff$  jede Teilfolge der  $(X_n)$  enthält eine Teilteilstolge, die  $\mathbf{P}$ -f.s. gegen  $X$  konvergiert.

In diesem Sinne hängt die Theorie der stochastischen Integration nur von den Nullmengen von  $\mathbf{P}$  ab.

## 14.1. Definition: Stochastischer Integrator, Itô-Integral

Ein adaptierter regulärer Prozess  $X$  heißt ein *stochastischer Integrator*, falls für jeden Integranden  $H$  ein adaptierter Prozess  $I$ , geschrieben  $I_t = \int_0^t H dX (= \int_0^t H_s dX_s)$ , existiert mit folgender Eigenschaft:

$H^n$  elementare Integranden mit  $H^n \xrightarrow{\text{stoch.}} H$ , so gilt  $\int H^n dX \xrightarrow{\text{stoch.}} I$ .

$\int H dX$  heißt *Itô-Integral* von  $H$  bezüglich  $X$

### 14.1.1. Lemma:

$X$  ist genau dann ein Integrator, falls für jede Folge  $H^n$  von elementaren Integranden mit  $H^n \xrightarrow{\text{stoch.}} 0$  gilt  $\int H^n dX \xrightarrow{\text{stoch.}} 0$

**Beweis:**

**Notwendige Bedingung:**  $\checkmark$

**Hinreichende Bedingung:** Angenommen es gibt Folge  $H^n$  von elementaren Integranden mit

$H^n \xrightarrow{\text{stoch.}} H$ , aber  $\int H^n dX \not\xrightarrow{\text{stoch.}} \int H dX$ , d.h.  $\exists (r_n), (s_n), \varepsilon > 0$  mit  $d_{lq}(\int H^{s_n} dX, \int H^{r_n} dX) \geq \varepsilon > 0$ .

Dann gilt für  $\tilde{H}^n := H^{r_n} - H^{s_n} \xrightarrow{\text{stoch.}} 0$ , aber  $\int \tilde{H}^n dX$  konvergiert nicht.

### 14.1.2. Definition: Fast sicher endliche Variation

$X$  hat *f.s. endliche Variation*, wenn es für jedes  $t > 0$  eine reelle Zufallsvariable  $V_t$  gibt mit

$$\sum_{i=0}^{k-1} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \leq V_t \text{ f.s.}$$

für alle Zerlegungen  $0 = t_0 < t_1 \leq \dots \leq t_k = t, k \in \mathbb{N}$ .

**Beobachtung:**

Ein Prozess  $X$  mit endlicher Variation ist ein (stochastischer) Integrator:

Für elementaren Integranden  $H_t = \sum_{i=0}^{k-1} H_{\tau_i+} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_i < t \leq \tau_{i+1}\}}$  ist

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t H dX \right| &= \left| \sum_{i=0}^{k-1} H_{\tau_i+} \cdot (X_{\min\{\tau_i, t\}} - X_{\min\{\tau_i, t\}}) \right| \\ &\leq \sup_{s \leq t} |H_s| \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} |X_{\min\{\tau_i, t\}} - X_{\min\{\tau_i, t\}}|}_{\leq V_t} \end{aligned}$$

demnach gilt  $\int H^n dX \xrightarrow{\text{stoch}} 0$ , sofern  $H^n \xrightarrow{\text{stoch}} 0$ .

(Dieses Integral ist das (Lebesgue-)Stieltjes-Integral.)

### 14.1.3. Bemerkung:

- (i) Die Prozesse mit endlicher Variation sind ein Vektorraum.
- (ii) Wenn  $X$  (f.s.) wachsende Pfade hat, so ist  $X$  von endlicher Variation.
- (iii)  $X$  ist (fast sicher) von endlicher Variation  $\iff X = X' - X''$  (f.s.) für  $X', X''$  Prozesse mit wachsenden Pfaden

Betrachte zufällige Partition  $\mathbb{T} = (\tau_0, \dots, \tau_k)$  mit  $0 =: \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_k \leq \tau_{k+1} = \infty$  Stoppzeiten.

#### Definiton

Eine Folge von Partitionen  $\mathbb{T}_n := (\tau_0^{(n)}, \dots, \tau_{k_n}^{(n)})$  heißt *asymptotisch fein* auf  $[0, t]$ , wenn  $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbf{P} \left[ \max_{i: \tau_i^{(n)} \leq t} |\tau_{i+1}^{(n)} - \tau_i^{(n)}| > \varepsilon \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und *asymptotisch fein*, wenn dies für jedes  $t > 0$  gilt.

Zu einem Integranden  $H$  und Partitionsfolge  $(\mathbb{T}_n)$  bilde  $H_t^{\mathbb{T}_n} = \sum_{i=0}^{k_n} H_{\tau_i^{(n)}+} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_i^{(n)} < t \leq \tau_{i+1}^{(n)}\}}$ , für asymptotisch feine  $(\mathbb{T}_n)$  gilt  $H^{\mathbb{T}_n} \xrightarrow{\text{stoch.}} H$

#### Beobachtung:

Es gilt  $\int H^{\mathbb{T}_n} dX \xrightarrow{\text{stoch}} \int H dX$ .



**Beobachtung und Definition:**

Sei  $X$  ein Integrator und  $0 =: \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_k = t$  Stoppzeiten, so gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} (X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i})^2 &= \sum_{i=0}^{k-1} (X_{\tau_{i+1}}^2 - X_{\tau_i}^2) - 2 \sum_{i=0}^{k-1} X_{\tau_i} (X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i}) \\ &= X_t^2 - X_0^2 - 2 \sum_{i=0}^{k-1} X_{\tau_i} (X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i}) \\ &= X_t^2 - X_0^2 - 2 \int_0^t X_-^{\mathbb{T}} dX \end{aligned}$$

Für eine asymptotisch feine Folge  $(\mathbb{T}_n)$  gilt:

$$\sum_{i=0}^{k-1} (X_{\min\{t, \tau_{i+1}\}} - X_{\min\{\tau_i, t\}})^2 \xrightarrow{\text{stoch}} X_t^2 - X_0^2 - 2 \int_0^t X_- dX =: [X]_t$$

Der Prozess  $([X]_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  heißt *quadratische Variation* von  $X$ .

Für Integratoren  $X, Y$  heißt der Prozess  $([X, Y]_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  mit

$$[X, Y]_t = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_- dX - \int_0^t X_- dY$$

*quadratische Kovariation* von  $X$  und  $Y$ .

**Bemerkung:**

$[X]_t = 0$ , wenn  $X$  endliche Variation hat.

**14.1.4. Satz:**

Seien  $X, Y, Z$  Integratoren und  $H, K$  Integranden.

(i) Es gilt (f.s.)

$$[X, Y] = [Y, X], \quad [X, X] = [X], \quad [\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda [X, Z] + \mu [Y, Z] \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad [X, Y] \leq [X] \cdot [Y].$$

(ii)  $[X]$  und  $[X, Y]$  haben Pfade von endlicher Variation.

(iii)  $I := \int H dX$  ist ebenfalls ein Integrator und  $\int K dI = \int K H dX$ .

(iv) Ist  $0 =: \tau_0^{(n)} \leq \tau_1^{(n)} \leq \dots \leq \tau_{k_n}^{(n)}$  asymptotisch fein auf  $[0, t]$ , so gilt

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} H_{\tau_i^{(n)+}} (X_{\tau_{i+1}^{(n)}} - X_{\tau_i^{(n)}}) (Y_{\tau_{i+1}^{(n)}} - Y_{\tau_i^{(n)}}) \xrightarrow{\text{stoch}} \int_0^t H d[X, Y],$$

weiter ist

$$\left[ \int H dX \right] = \int H^2 d[X] \quad \text{und} \quad \left[ \int H dX, \int K dY \right] = \int H K d[X, Y].$$

**Beweis:**

Beobachtung: Sei  $(\mathbb{T}_n)$  asymptotisch feine Folge. Dann ist

$$\sum_i (X_{\min\{t, \tau_{i+1}^{(n)}\}} - X_{\min\{t, \tau_i^{(n)}\}})(Y_{\min\{t, \tau_{i+1}^{(n)}\}} - Y_{\min\{t, \tau_i^{(n)}\}}) \xrightarrow{\text{stoch}} [X, Y]$$

- (i) Nach Definition und Beobachtung klar.  $\checkmark$  (verwende Cauchy-Schwarz für die letzte Ungleichung)
- (ii)  $[X]$  hat wachsende Pfade, ist folglich von endlicher Variation,  $[X, Y] = \frac{1}{4}[X + Y] - \frac{1}{4}[X - Y]$  ist somit ebenfalls von endlicher Variation
- (iii) (Beweisskizze:)  
Seien  $H_t := L\mathbf{1}_{\{\tau < t\}}$ ,  $K_t := L'\mathbf{1}_{\{\tau' < t\}}$ .  
Dann ist  $Y_t := L(X_t - X_{\min\{\tau, t\}})$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^t K dY &= L'(Y_t - Y_{\min\{t, \tau'\}}) \\ &= L' \cdot L(X_t - X_{\min\{t, \tau\}} - X_{\min\{t, \tau'\}} + X_{\min\{t, \tau, \tau'\}}) \\ &= L' \cdot L(X_t - X_{\min\{t, \max\{\tau, \tau'\}\}}) \\ &= \int_0^t KH dX. \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall ergibt sich durch Approximation mit elementaren Integranden.

- (iv) Sei  $Z := XY - X_0Y_0$ , dies ist ein Integrator<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} &\sum H_{\tau_i+}(X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i})(Y_{\tau_{i+1}} - Y_{\tau_i}) \\ &= \sum H_{\tau_i+}(Z_{\tau_{i+1}} - Z_{\tau_i}) - \sum H_{\tau_i+}X_{\tau_i}(Y_{\tau_{i+1}} - Y_{\tau_i}) - \sum H_{\tau_i+}Y_{\tau_i}(X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i}) \\ &\xrightarrow{\text{stoch}} \int HdZ - \int HX_-dY - \int HY_-dX \end{aligned}$$

für eine asymptotisch feine Folge von Partitionen. (ersetze „ $dZ = d[X, Y] + X_-dY + Y_-dX$ “)

Wir zeigen schließlich  $[\int HdX, \int KdY] = \int HKd[X, Y]$ :

Sei  $H$  elementar,  $K \equiv 1$ ,  $I := \int HdX$ . Sei weiter  $\mathbb{T}^n$  asymptotisch feine Folge von

---

<sup>1</sup>Denn  $Z = [X, Y] + \int Y_-dX + \int X_-dY$ ,  $[X, Y]$  hat endliche Variation,  $\int Y_-dX$  und  $\int X_-dY$  sind nach (iii) ebenfalls Integratoren.

Partitionen (die jeweils die Sprünge von  $H$  enthalten). Es gilt

$$\begin{aligned}
I_{\tau_{i+1}^{(n)}} - I_{\tau_i^{(n)}} &= H_{\tau_i^{(n)+}} (X_{\tau_{i+1}^{(n)}} - X_{\tau_i^{(n)}}), \\
&= \sum_{i=0}^{k_n} \underbrace{(I_{\tau_{i+1}^{(n)}} - I_{\tau_i^{(n)}})}_{=H_{\tau_i^{(n)+}} (X_{\tau_{i+1}^{(n)}} - X_{\tau_i^{(n)}})} \cdot (Y_{\tau_{i+1}^{(n)}} - Y_{\tau_i^{(n)}}) \xrightarrow{\text{stoch}} [I, Y] \\
&= \sum_{i=0}^{k_n} H_{\tau_i^{(n)+}} (X_{\tau_{i+1}^{(n)}} - X_{\tau_i^{(n)}}) \cdot (Y_{\tau_{i+1}^{(n)}} - Y_{\tau_i^{(n)}}) \\
&\xrightarrow{\text{stoch}} \int Hd[X, Y].
\end{aligned}$$

Für allgemeines  $H$ : Betrachte  $H^n$  elementar mit  $H^n \xrightarrow{\text{stoch}} H$ , also  
 $I^n := \int H^n dX \xrightarrow{\text{stoch}} \int HdX$ ,

$$[I^n, Y]_t = I_t^n Y_t - I_0^n Y_0 - \int_0^t I_-^n dY - \int_0^t Y_- dI^n,$$

$$\left[ \int HdX, \int KdY \right] = \left[ I, \int KdY \right] = \int Kd[I, Y] = \int KHd[X, Y].$$

## 14.2. Satz:

Ein Martingal  $(X_t)$  mit  $\mathbf{E}[X_t^2] < \infty \forall t$  ist ein Integrator und für jeden Integrand  $H$  mit

$$\mathbf{E}[\sup_{s \leq t} |H_s|^2] < \infty \forall t \quad (\star)$$

ist dann  $\int HdX$  ein Martingal.

### 14.2.1. Erinnerung: Satz vom optionalen Stoppen

Sei  $\tau$  f.s. beschränkte Stoppzeit,  $M$  ein Martingal, so gilt  $\mathbf{E}[M_t | \mathcal{F}[\tau]] = M_{\min\{t, \tau\}}$ .

### 14.2.2. Erinnerung: Doobs $\mathcal{L}^2$ -Ungleichung:

Sei  $(M_t)$  ein  $\mathcal{L}^2$ -Martingal, dann gilt

$$\mathbf{P}[\sup_{s \leq t} |M_s| \geq \varepsilon] \leq \varepsilon^{-2} \cdot \mathbf{E}[M_t^2].$$

**Beweis des Satzes (14.2):**

- (i) Sei  $H$  f.s. beschränkter elementarer Integrand, zeige  $\int HdX$  ist Martingal, o.E.  
 $H_t = L\mathbb{1}_{\{\tau < t\}}$ . Sei  $s < t$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \left[ \int_0^t HdX \middle| \mathcal{F}[\max\{s, \tau\}] \right] &= \mathbf{E}[L\mathbb{1}_{\{\tau < t\}}(X_t - X_\tau) | \mathcal{F}[\max\{s, \tau\}]] \\
 &= L \cdot \mathbf{E}[\mathbb{1}_{\{\tau < t\}}(X_t - X_\tau) | \mathcal{F}[\max\{s, \tau\}]] \\
 &= L \cdot (X_{\min\{t, \max\{s, \tau\}\}} - X_{\min\{t, \tau, \max\{s, \tau\}\}}) \\
 &= L\mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}(X_s - X_{\min\{s, \tau\}}) + L\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \underbrace{(X_{\min\{t, \tau\}} - X_{\min\{t, \tau\}})}_{=0} \\
 &= L\mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}(X_s - X_{\min\{s, \tau\}}) \text{ ist } \mathcal{F}_s\text{-messbar,}
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \left[ \int_0^t HdX | \mathcal{F}_s \right] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\dots | \mathcal{F}[\max\{s, \tau\}]] | \mathcal{F}_s] \\
 &= L\mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}(X_s - X_{\min\{s, \tau\}}) \\
 &= \int_0^s HdX.
 \end{aligned}$$

- (ii) Sei  $H_t = \sum_{i=0}^k L_i \mathbb{1}_{\{\tau_i < t \leq \tau_{i+1}\}}$  mit  $|L_i| \leq c$  f.s. Für  $i < j$  ist

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{E}[L_i \cdot (X_{\min\{t, \tau_{i+1}\}} - X_{\min\{t, \tau_i\}}) \cdot L_j \cdot (X_{\min\{t, \tau_{j+1}\}} - X_{\min\{t, \tau_j\}}) | \mathcal{F}[\tau_j]] \\
 &= L_i (X_{\min\{t, \tau_{i+1}\}} - X_{\min\{t, \tau_i\}}) \cdot L_j \cdot \underbrace{\mathbf{E}[X_{\min\{t, \tau_{j+1}\}} - X_{\min\{t, \tau_j\}} | \mathcal{F}[\tau_j]]}_{=0} \\
 &= 0 \text{ f.s.,}
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \left[ \left( \int_0^t HdX \right)^2 \right] &= \mathbf{E} \left[ \sum_{i,j=0}^k L_i (X_{\min\{t, \tau_{i+1}\}} - X_{\min\{t, \tau_i\}}) \cdot L_j (X_{\min\{t, \tau_{i+1}\}} - X_{\min\{t, \tau_j\}}) \right] \\
 &= \sum_{i=0}^k \mathbf{E}[L_i^2 (X_{\min\{t, \tau_{i+1}\}} - X_{\min\{t, \tau_i\}})^2] \\
 &\leq c^2 \mathbf{E}[(X_t - X_0)^2].
 \end{aligned}$$

- (iii) Sei  $H^n$  eine Folge von elementaren Integranden mit  $H^n \xrightarrow{\text{stoch}} 0$ ,  
 $K^n := \max\{\min\{H^n, c\}, (-c)\}$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} \left[ \sup_{s \leq t} \left| \int_0^s H^n dX \right| > \varepsilon \right] &\leq \mathbf{P} \left[ \sup_{s \leq t} |H_s| > c \right] + \underbrace{\mathbf{P} \left[ \sup_{s \leq t} \left| \int_0^s K^n dX \right| > \varepsilon \right]}_{\leq \varepsilon^{-2} \mathbf{E} \left[ \left( \int_0^t K^n dX \right)^2 \right] \leq \varepsilon^{-2} c^2 \mathbf{E}[(X_t - X_0)^2]} \\
 &\leq \varepsilon^{-2} \mathbf{E} \left[ \left( \int_0^t K^n dX \right)^2 \right] \leq \varepsilon^{-2} c^2 \mathbf{E}[(X_t - X_0)^2]
 \end{aligned}$$

(nach Doobs Ungleichung), folglich

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left[ \sup_{s \leq t} \left| \int_0^s H^n dX \right| > \varepsilon \right] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

- (iv) Nach obigem ist  $\int H dX$  ein  $(\mathcal{L}^2)$ -Martingal für beschränktes  $H$ , für allgemeines  $H$ , das  $(\star)$  erfüllt, ergibt sich dies mittels Approximation. Die entscheidende Beobachtung ist, dass die für die „kanonischen“ Approximanden  $H^n \xrightarrow{\text{stoch}} H$  gilt  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E} \left[ \left( \int_0^t H^n dX \right)^2 \right] < \infty$ .

**Bericht:**

Die allgemeinsten stochastischen Integratoren sind sog. Semimartingale, d.h. stochastische Prozesse, die sich als Summe aus einem (lokalen) Martingal und einem Prozess von f.s. endlicher Variation darstellen lassen (siehe z.B. Philip Protter, *Stochastic integration and differential equations. A new approach*. Springer, 1990).

**Bemerkung/Bericht:**

Die Brown'sche Bewegung ist ein  $(\mathcal{L}^2)$ -Martingal.

### 14.3. Itô-Formel

**14.3.1. Satz:**

Seien  $X^1, \dots, X^d$  Integratoren mit fast sicher stetigen Pfaden,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ . Dann gilt fast sicher:

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t f_{x_i x_j}(X_s) d[X_s^i, X_s^j]$$

(mit  $f_{x_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} f$ ,  $f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} f$ ).

**Beweis:**

Sei  $0 \leq u \leq v \leq t$ ,  $|X_u - X_v| \leq \eta$ ,  $\sup_{s \leq t} |X_s| \leq K$ . Gemäß Taylor-Entwicklung gilt

$$f(X_v) = f(X_u) + \sum_{i=1}^d f_{x_i}(X_u)(X_v^i - X_u^i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d f_{x_i x_j}(X_u)(X_v^i - X_u^i)(X_v^j - X_u^j) + R(u, v),$$

wobei

$$\begin{aligned} |R(u, v)| &\leq \sup_{x \in S(u, v)} \left| \sum_{i,j=1}^d (f_{x_i x_j}(x) - f_{x_i x_j}(X_u))(X_v^i - X_u^i)(X_v^j - X_u^j) \right| \\ &\leq C |X_v - X_u|^2 \cdot \underbrace{\max_{i,j=1, \dots, d} \max_{y, z \in B_K(0), |y-z| \leq \eta} |f_{x_i x_j}(y) - f_{x_i x_j}(z)|}_{\varphi(K, \eta)} \end{aligned}$$

wobei  $S(u, v) =$  Strecke zwischen  $X_u$  und  $X_v$ .

(Beobachtung: Für jedes  $K \geq 0$  gilt  $\varphi(K, \eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ , da die zweiten Ableitungen auf jeder kompakten Menge gleichmäßig stetig sind.)

Sei  $\tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_k, \tau_k = t$  eine Partition mit  $|X_{\tau_{l+1}} - X_{\tau_l}| \leq \eta$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\sup_{s \leq t} |X_s| \leq K} & \left| f(X_t) - f(X_0) - \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{i=1}^d f_{x_i}(X_{\tau_l})(X_{\tau_{l+1}}^i - X_{\tau_l}^i) \right. \\ & \left. - \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{i,j=1}^d f_{x_i x_j}(X_{\tau_l})(X_{\tau_{l+1}}^i - X_{\tau_l}^i)(X_{\tau_{l+1}}^j - X_{\tau_l}^j) \right| \\ & \leq C \cdot \varphi(K, \eta) \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{i=1}^d (X_{\tau_{l+1}}^i - X_{\tau_l}^i)^2 \end{aligned}$$

Längs einer asymptotisch feinen Folge von Partitionen konvergiert die linke Seite gegen

$$\mathbb{1}_{\sup_{s \leq t} |X_s| \leq K} \left| f(X_t) - f(X_0) - \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x_i}(X_s) dX_s^i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t f_{x_i x_j}(X_s) d[X_s^i, X_s^j] \right|,$$

die rechte Seite gegen

$$C \varphi(K, \eta) \sum_{i=1}^d [X^i]_t.$$

Die Behauptung folgt mit  $\eta \rightarrow 0$ , dann  $K \rightarrow \infty$ .

# 15. Die geometrische Brown'sche Bewegung und die Black-Scholes-Formel

In Abschnitt 13.3 hatten wir die Black-Scholes-Formel als Limes des fairen Preises einer (europäischen) Option in einer Folge von Cox-Ross-Rubinstein-Modellen hergeleitet, in der die Anzahl Handelsperioden in geeigneter Weise unendlich groß wird. Dieser Zugang gestattete, die BS-Formel mit „elementaren“ Methoden (im Wesentlichen dem Zentralen Grenzwertsatz) herzuleiten, andererseits verliert man dabei die Limesdynamik des Preisprozesses und der Hedgingstrategien „aus dem Blick.“ Wir tragen hier nach, wie die Theorie der stochastischen Integration aus Abschnitt 14 diese Lücke füllen kann.

Sei  $(B_t)_{t \geq 0}$  eine Brownsche Bewegung, d.h. ein stochastischer Prozess mit unabhängigen Zuwächsen und stetigen Pfaden, bei dem  $B_{t+h} - B_t \sim \mathcal{N}(0, h)$  für alle  $t, h \geq 0$ , und  $B_0 = 0$ . (Existenz hatten wir in Übungsaufgabe 3 auf Blatt 11 gesehen.) Offenbar ist  $(B_t)_{t \geq 0}$  ein Martingal (mit  $\mathbf{E} B_t^2 = t < \infty$  für jedes  $t \geq 0$ ), und somit nach Satz 14.2 ein stochastischer Integrator.

## Beobachtung (quadratische Variation der Brown'schen Bewegung)

Es gilt  $[B]_t = t$ , was man gelegentlich auch suggestiv schreibt als „ $(dB_t)^2 = dt$ “.

### Beweis:

Wegen

$$\mathbf{E}[B_{t+h}^2 | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[B_t^2 + 2B_t(B_{t+h} - B_t) + (B_{t+h} - B_t)^2 | \mathcal{F}_t] = B_t^2 + \mathbf{E}[(B_{t+h} - B_t)^2 | \mathcal{F}_t] = B_t^2 + h$$

ist  $M_t := B_t^2 - t$  ein stetiges Martingal (mit  $\mathbf{E} M_t^2 < \infty$  für jedes  $t \geq 0$ ), andererseits ist nach Satz 14.2 auch

$$M'_t := B_t^2 - [B]_t = 2 \int_0^t B_s dB_s$$

ein Martingal, somit auch  $M''_t := M_t - M'_t = [B]_t - t$ . Darüberhinaus ist  $[M'']_t \equiv 0$ , denn  $M''$  hat offensichtlich Pfade von beschränkter Variation, somit ist auch

$$(M''_t)^2 = 2 \int_0^t M''_s dM''_s$$

ein Martingal. Folglich gilt  $\mathbf{E} (M''_t)^2 = \mathbf{E} (M''_0)^2 = 0$ , d.h.  $M'' \equiv 0$  f.s., also  $[B]_t = t$ .

(Hinter diesem Beweis steckt die allgemeine Beobachtung, dass die quadratische Variation eines Martingals  $X$  charakterisiert ist als derjenige Prozess  $V$ , für den  $X^2 - V$  wiederum ein Martingal ist. Alternativ kann man im Fall der Brown'schen Bewegung auch explizit quadrierte Inkremente längs einer geeigneten Partitionsfolge aufsummieren.)

## Geometrische Brown'sche Bewegung

Sei  $S_0$   $\mathcal{F}_0$ -adaptiert,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ . Die Lösung  $(S_t)_{t \geq 0}$  der (stochastischen Integral-)Gleichung

$$(*) \quad S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_u du + \int_0^t \sigma S_u dB_u, \quad t \geq 0$$

ist gegeben durch

$$(**) \quad S_t = S_0 \exp\left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right), \quad t \geq 0.$$

$S$  heißt *geometrische Brown'sche Bewegung*. Man schreibt (\*) auch häufig in der suggestiven Form einer *stochastischen Differentialgleichung*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

**Beweis:** Anwendung der Itô-Formel auf  $f(B_t, t)$  mit  $f(b, t) := \exp(\sigma b + (\mu - \sigma^2/2)t)$  ( $f_b(b, t) = \sigma f(b, t)$ ,  $f_{bb}(b, t) = \sigma^2 f(b, t)$ ,  $f_t(b, t) = (\mu - \sigma^2/2)f(b, t)$ ) liefert

$$\begin{aligned} f(B_t, t) &= \underbrace{f(B_0, 0)}_{=1} + \int_0^t \sigma f(B_s, s) dB_s + \int_0^t (\mu - \sigma^2/2) f(B_s, s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 f(B_s, s) d[B]_s \\ &= 1 + \int_0^t \mu f(B_s, s) ds + \int_0^t \sigma f(B_s, s) dB_s, \end{aligned}$$

denn  $[B]_s = s$  und mit  $I_t = t$  ist  $[I] = [I, B] \equiv 0$ . Durch Multiplikation mit  $S_0$  folgt (\*).

## Black-Scholes-Gleichung

Seien eine *Volatilität*  $\sigma > 0$ , *risikoloser Zinssatz*  $r \geq 0$  und ein (beschränktes) stetiges Auszahlungsprofil  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Wie wir in Abschnitt 13.3 gesehen haben, ist der Black-Scholes-Preis der europäischen Option mit Auszahlungsprofil  $f$  und Laufzeit  $t \geq 0$  bei aktuellem Kurs  $x$  des Basiswertpapiers gegeben durch

$$\begin{aligned} v(x, t) &= e^{-rt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-b^2/(2t)} f(xe^{\sigma b + (r - \sigma^2/2)t}) db \\ &= e^{-rt} \mathbf{E}\left[f(xe^{\sigma B_t + (r - \sigma^2/2)t})\right]. \end{aligned}$$

Die Wertfunktion  $v$  löst folgendes Cauchy-Problem (die *Black-Scholes-Gleichung*)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = rx \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) - rv(x, t), & x, t > 0, \\ v(x, 0) = f(x), & x > 0. \end{cases}$$

## Black-Scholes-Modell, $\Delta$ -Hedge

Das Black-Scholes-Modell ist ein zeitkontinuierliches Marktmodell, in dem es zwei Wertpapiere gibt: Eine festverzinsliche Anleihe  $S_t^0 = e^{rt}$  mit risikolosem Zinssatz  $r \geq 0$ , und ein risikobehaftetes Wertpapier  $S^1$ , dessen Dynamik durch eine geometrische Brown'sche Bewegung gegeben ist,

$$dS_t^1 = \mu S_t^1 dt + \sigma S_t^1 dB_t$$

(dieses ist die Limesdynamik der in Abschnitt 13.3 betrachteten Folge von Modellen).



Wir betrachten eine (europäische) Option mit Fälligkeit  $T > 0$  und Auszahlungsprofil  $f(S_T^1)$ . Nach obigem ist der Wert zur Zeit  $t$ ,  $t \in [0, T]$ , gegeben durch  $V_t := v(S_t^1, T - t)$ . Die Itô-Formel liefert

$$\begin{aligned} dV_t &= v_x(S_t^1, T - t)dS_t^1 + \frac{1}{2}v_{xx}(S_t^1, T - t)\underbrace{d[S^1]_t}_{=\sigma^2(S_t^1)^2dt} - v_t(S_t^1, T - t)dt \\ &= v_x(S_t^1, T - t)dS_t^1 + r(v(S_t^1, T - t) - S_t^1v_x(S_t^1, T - t))dt \\ &= \underbrace{v_x(S_t^1, T - t)}_{=:\Theta_t^1}dS_t^1 + \underbrace{\frac{V_t - S_t^1v_x(S_t^1, T - t)}{S_t^0}}_{=:\Theta_t^0}dS_t^0 \end{aligned}$$

(wobei wir benutzen, dass  $\frac{1}{2}v_{xx}x - v_t = r(v - xv_x)$  gemäß der Black-Scholes-Gleichung, und  $dS_t^0 = rS_t^0dt$  nach Annahme).

Demnach ist das Portfolio, das zur Zeit  $t$  aus  $\Theta_t^0$  Einheiten  $S^0$  und  $\Theta_t^1$  Einheiten  $S^1$  besteht (also den Wert  $V_t = \Theta_t^0S_t^0 + \Theta_t^1S_t^1$  hat), *selbstfinanzierend*, d.h. es genügt der Bedingung

$$V_t = V_0 + \int_0^t \Theta_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \Theta_u^1 dS_u^1,$$

und es dupliziert das gewünschte Auszahlungsprofil, denn  $V_T = v(S_T, T - T) = f(S_T)$ .

Diese Replikationsstrategie heißt  *$\Delta$ -Hedge*: Die Anzahl gehaltener Aktien ist gerade die Ableitung des aktuellen Werts der Option nach dem Basiskurs, das sogenannte  $\Delta$  der Option. Eine umfassendere Diskussion findet sich beispielsweise in Abschnitt 5.6 des Buches von Hans Föllmer und Alexander Schied, *Stochastic finance. An introduction in discrete time, 2nd Ed.*, de Gruyter, 2004.



**Teil III.**  
**Anhang**



## A. Verwendeter R-Code

### A.1. Konfidenzintervalle im Binomialmodell: Für Abbildung 6.3 verwendeter R-Code

```
# Konfidenzintervalle fuer den Erfolgsparameter bei der
# Binomialverteilung

# Exaktes Konfidenzintervall basierend auf Beta-Quantilen
bin.konf.ex <- function(n, x, a) {
  c(qbeta(a/2,x,n-x+1), qbeta(a/2,x+1,n-x,lower.tail=FALSE))
}

# Auf Normalapproximation basiertes Konfidenzintervall
bin.konf.nappr <- function(n, x, a) {
  c(x/n-qnorm(1-a/2)/(2*sqrt(n)), x/n+qnorm(1-a/2)/(2*sqrt(n)))
}

# Auf Chebychev-Ungleichung basiertes Konfidenzintervall
bin.konf.cheby <- function(n, x, a) {
  c(x/n-1/sqrt(4*n*a), x/n+1/sqrt(4*n*a))
}

anteile <- c(0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5)

erzeuge.bild <- function(n, alpha) {
  linientyp <- c(3,2,1)
  ve <- 0.01
  br <- 0.005

  plot(c(-1,-1), xlim=c(0,0.5), ylim=c(0,0.8),
       xlab="Beobachteter Anteil", ylab="",
       main=c("Konfidenzintervalle für die Binomialverteilung",
             paste("zum Irrtumsniveau ",alpha," (n=",n,")",sep="")))
  abline(1,0)

  for (a in anteile) {
    x <- round(n*a)

    i <- bin.konf.cheby(n,x,alpha)

    lines(c(a-ve,a+ve), i, lty=linientyp[1])
  }
}
```

```

lines(c(a-ve-br,a-ve+br), c(i[1],i[1]), lty=linientyp[1])
lines(c(a-ve-br,a-ve+br), c(i[2],i[2]), lty=linientyp[1])

i <- bin.konf.nappr(n,x,alpha)
lines(c(a,a), i, lty=linientyp[2])
lines(c(a-br,a+br), c(i[1],i[1]), lty=linientyp[2])
lines(c(a-br,a+br), c(i[2],i[2]), lty=linientyp[2])

i <- bin.konf.ex(n,x,alpha)
lines(c(a+ve,a+ve), i, lty=linientyp[3])
lines(c(a+ve-br,a+ve+br), c(i[1],i[1]), lty=linientyp[3])
lines(c(a+ve-br,a+ve+br), c(i[2],i[2]), lty=linientyp[3])
}

legend(0.0, 0.8, c("Chebychev","N.approx","Exakt"), lty=linientyp)
}

erzeuge.bild(20,0.05)
erzeuge.bild(50,0.05)
erzeuge.bild(100,0.05)

```

## A.2. Temperaturdiagramm

In Abschnitt 12.3.4 verwendeter R-Code.

```

> a<-read.table("karlsruhe_august.dat", header=TRUE)
> attach(a)
> Zeit<-Jahr/1000
> b<-data.frame(Temp=Temp, Zeit=Zeit, Zeit2=Zeit^2, Zeit3=Zeit^3)
> m1<-lm(Temp~Zeit, data=b)
> m1

```

Call:

```
lm(formula = Temp ~ Zeit, data = b)
```

Coefficients:

(Intercept)	Zeit
16.804	1.064

```

> m2<-lm(Temp~Zeit+Zeit2, data=b)
> m2

```

Call:

```
lm(formula = Temp ~ Zeit + Zeit2, data = b)
```

Coefficients:

(Intercept)	Zeit	Zeit2
660.8	-676.3	177.9

```

> m3<-lm(Temp~Zeit+Zeit2+Zeit3, data=b)
> m3

Call:
lm(formula = Temp ~ Zeit + Zeit2 + Zeit3, data = b)

Coefficients:
(Intercept)      Zeit      Zeit2      Zeit3
      -7532      12252     -6618       1190

> plot(Zeit, Temp, main="Mittlere Augusttemperatur in Karlsruhe", xlab="Jahr/1000",ylab="Temperatur")
> points(Zeit,fitted.values(m1),type='l',lty=1)
> points(Zeit,fitted.values(m2),type='l',lty=2)
> points(Zeit,fitted.values(m3),type='l',lty=3)
> legend(1.87,24,legend=c("Grad 1","Grad 2","Grad 3"),lty=c(1,2,3))
>
> dev.copy2eps(file="karlsruhe.eps")
X11
  2
> Var.ti <- sum(Zeit^2)/length(Zeit)-mean(Zeit)^2
> V.stern <- sum(residuals(m1)^2)/(206-2)
> 1.064/sqrt(V.stern/(206*Var.ti))
[1] 0.6136871
> qt(0.995,df=204)
[1] 2.600144

```





# Abbildungsverzeichnis

2.1. Unter allen Punkten auf der Diagonalen $\langle(1, 1, \dots, 1)\rangle$ hat $(M(\mathbf{x}), M(\mathbf{x}), \dots, M(\mathbf{x}))$ den kleinsten euklidischen Abstand von $(x_1, \dots, x_n)$ . . . . .	9
3.1. Darstellung von $\psi(s) = 1 - s + s \log s$ . . . . .	18
6.1. Darstellung von Konfidenzbereichen in der $x$ - $\vartheta$ -Ebene . . . . .	30
6.2. Darstellung des $\alpha$ -Quantils $q$ . . . . .	31
6.3. Konfidenzintervalle zum Niveau 0.05 für den Erfolgsparameter im Binomialmodell, basierend auf Chebyshev-Ungleichung, Normalapproximation und auf Satz 6.2.2, als Funktion des beobachteten Anteils der Erfolge, für $n \in \{20, 50, 100\}$ . Siehe Abschnitt A.1 für den R-Code zur Erzeugung dieser Bilder. . . . .	34
8.1. Darstellung der kombinatorischen Größe $N(m; k, l)$ , als Anzahl der Wege durch dieses $k \times l$ -Gitter, so dass unter dem Weg nur $m = \sum m_i$ viele Punkte liegen . . . . .	41
8.2. Darstellung der Verteilungsfunktionen von $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ , wenn $\mathbf{P} \preceq \mathbf{Q}$ . . . . .	44
9.1. Abbildung zur Wahl von $c$ , falls die Verteilungsfunktion gerade an dieser Stelle einen Sprung hat. Deswegen kann es in manchen Fällen auch sinnvoll sein, den Test zu randomisieren. . . . .	48
11.1. Darstellung der orthogonalen Projektion im Zweidimensionalen auf einen eindimensionalen Unterraum . . . . .	60
12.1. Ausgleichsgerade zu gegebenen Punkten . . . . .	67
12.2. Darstellung der Projektionen eines Punktes $X$ im $\mathbb{R}^3$ auf $H \subset L \subset \mathbb{R}^3$ , $L$ ist dabei die Ebene, die durch das Rechteck $L$ dargestellt werden soll und $H$ der Unterraum, der von der blauen Geraden aufgespannt wird. . . . .	72



# Index

- $\chi^2$ -Verteilung, 36
- A-posteriori-Dichte, 27
- A-priori-Dichte, 27
- A-priori-Maß, 27
- adaptiert, 95
- Arbitrage, 83
  - frei, 91
  - möglichkeit, 91
  - preis, 91
  - preisprozess, 91
- Bayes-Schätzer, 27
- Bias, 9
- Call-Put-Parität, 88
- Claim, 91
  - duplizierbarer -, 91
- Contingent claim, 83
- Cramér-Rao-effizient, 13
- Dichte
  - A-posteriori-, 27
  - A-priori-, 27
- Doob
  - $s\mathcal{L}^2$ -Ungleichung, 101
- Entropie
  - relative, 17
- Erwartungstreue, 9
- Erwartungswert
  - bedingter, 21
- Exponentialverteilung, 18
- Fehler
  - 1. Art, 39
- Filtration, 85
- Fisher-Information, 11
- Fisher-Verteilung, 36
- Formel
  - Black-Scholes-, 88
  - Itô-, 103
- Forward, 88
- Fraktil, 30
- Handelsstrategie, 90
- Hedge, 91
- Hypothese
  - Alternativ-, 39
  - Null-, 39
  - Testen von -n, 3
- Integral
  - Itô-, 97
- Integrator
  - stochastischer -, 97
- Irrtumsniveau, 29
- Itô
  - Formel, 103
- Konfidenzbereich, 29, 32
  - e im normalverteilten linearen Modell, 73
- Konfidenzintervall, 3
- Konsistenz, 10, 16
- Kullback-Leibler-Abstand, 17
- Lemma
  - von Stein, 49
  - Neyman-Pearson-, 47
- Likelihood
  - Funktion, 7
  - Quotient, 53
- Maß
  - äquivalentes Martingal-, 92
  - A-priori-, 27
- Marktmodell
  - vollständiges -, 91
- Maximum-Likelihood
  - Prinzip, 7
  - Schätzer, 7, 16
- Median, 30

Konfidenzintervalle für -, 39  
 Mittlerer quadratischer Fehler, 9  
 Modell  
   Gauß'sches-, 54  
   CRR-, 85  
   exponentielles, 13  
   lineares -, 69  
   Normales, 8  
   parametrisches, 4  
   Standard-, 4  
   statistisches, 3  
 Option  
   Call-, 83  
   Put-, 83  
 Parametermerkmal, 4  
 Poisson  
   Verteilung, 18  
 prävisibel, 86  
 Prozess  
   Arbitragepreis-, 91  
   stochastischer -, 95  
   Wert-, 90  
   Zugewinn-, 90  
 Punkt-  
   Schätzer, 3  
 Quantile, 30  
 Rao-Blackwellisierung, 24  
 Regression, 67  
 Regularität, 11  
 Satz  
   - vom optionalen Stoppen, 101  
   - von Gauß-Markov, 70  
   von Lehmann-Scheffé, 25  
   Dichtentransformations-, 35  
   Fundamentals. der Preistheorie, 90  
   Steiner'scher Verschiebungs-, 8  
   Verallgemeinerter S. von Student, 72  
   von Cramér-Rao, 12  
   von Rao-Blackwell, 24  
 Schätzer  
   Bayes-, 27  
   kleinste-Quadrate-, 68  
   Maximum-Likelihood-, 7  
   regulärer, 12  
 Scorefunktion, 11  
 selbstfinanzierend, 91  
 Simpson-Paradoxon, 64  
 Statistik, 4  
   Ordnungs-, 31  
 stochastisch kleiner, 43  
 Stoppzeit, 95  
 Suffizienz, 24  
 Taxiproblem, 4  
 Test, 47  
    $t$ -T. auf Gleichheit der Mittelwerte, 78  
   Alternativ-, 47  
    $\chi^2$ -, 55  
    $\chi^2$ -Anpassungs-, 59  
    $\chi^2$ -T. auf Unabhängigkeit, 62  
    $\chi^2$ -Anpassungs-, 62  
   effektives Niveau eines -s, 47  
   F-T. auf Gleichheit der  
     Gruppenmittelwerte, 78  
   Gütefunktion eines -s, 47  
   gleichmäßig bester -, 47  
   Macht des -s, 47  
   Neyman-Pearson-, 48  
   randomisierter -, 47  
   Student'scher T-, 56  
   Umfang eines -s, 47  
   unverfälscht, 56  
 Varianz  
   -analyse, 76  
 Variation  
   f.s. endliche -, 97  
 Verteilung  
    $\chi_n^2$ , 36  
   Beta-, 31  
   Fisher, 36  
   Multinomial-, 59  
   Multivariate Standardnormal-, 60  
   Student'sche-, 37  
 Vollständigkeit, 24  
 Wilcoxon  
   -Rangsummen-Statistik, 40