Dr. M. Birkner SS 2008

Übungen zur Angewandten Stochastik

Blatt 5

---

1. Aufgabe (Tukeys „Westentaschentest") **a)** Wie wahrscheinlich ist es, dass eine mit „Kopf" beginnende faire Münzwurfserie der Länge n auf „Zahl" endet, und dass zugleich die Summe der Anzahl Köpfe am Anfang und der Anzahl Zahlen am Ende $\geq m$ ist?

b) Um die Hypothese, dass zwei reelle Stichproben (von ungefähr gleichem Umfang) aus ein- und derselben Verteilung stammen zu prüfen, hat John Tukey folgenden kompakten Test vorgeschlagen (John W. Tukey, A quick, compact, two-sample test to Duckworth's specifications, *Technometrics* **1**, 31–48 (1959)):
Falls in der einen Stichprobe k_1 Werte kleiner sind als der kleinste Wert in der anderen Stichprobe, und k_2 Werte in der anderen Stichprobe größer sind als der größte Wert in der einen Stichprobe, und falls $k_1 + k_2 \geq 7$ gilt, so verwerfe man die Hypothese zum Niveau 5%. Falls $k_1 + k_2 \geq 10$, so verwerfe man die Hypothese zum Niveau 1%, falls $k_1 + k_2 \geq 13$, so verwerfe man die Hypothese zum Niveau 0,1%.
Benutzen Sie Teil a), um Tukeys Aussage zu verifizieren.

2. Aufgabe Beweisen Sie Fishers Approximation der χ^2_n-Verteilung: Sei S_n χ^2-verteilt mit n Freiheitsgraden, dann konvergiert die Verteilung von $\sqrt{2S_n} - \sqrt{2n}$ mit $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung.

(Hinweis: Stellen Sie beispielsweise S_n dar als $\sum_{i=1}^n X_i^2$ mit unabhängigen, normalverteilten X_i, dann ist obiger Ausdruck $\sqrt{2n}(\sqrt{n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2} - 1)$. Benutzen Sie eine Taylor-Entwicklung von $\sqrt{x}$ um $x = 1$.)

3. Aufgabe 10 Testpersonen haben in einem Versuch einen Schuh mit Sohlenmaterial A und einen Schuh mit Sohlenmaterial B getragen, nach einiger Zeit wurde die Abnutzung gemessen, mit folgendem Ergebnis:

Testperson	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Abnutzung A	13.2	8.2	10.9	14.3	10.7	6.6	9.5	10.8	8.8	13.3
Abnutzung B	14.0	8.8	11.2	14.2	11.8	6.4	9.8	11.3	9.3	13.6

Ist die Abnutzung für eines der Materialien signifikant kleiner (und für welches)? Führen Sie einen geeigneten statistischen Test durch.
(Hinweis: `R` kennt diesen (populären) Datensatz mittels `data(shoes,package='MASS')`.)

4. Aufgabe (Aus E.L. Lehmann, *Nonparametrics: statistical methods based on ranks*, Holden-Day, 1975) Teilnehmer eines BWL-Kurses wurden in zwei Gruppen aufgeteilt, die eine Gruppe verfolgte die Vorlesungen direkt, die andere am Fernsehschirm. Vor und nach dem Kurs wurde ein Test geschrieben, die Differenzen der Punktzahlen waren in den beiden Gruppen folgende:

Gruppe „live": 20.3, 23.5, 4.7, 21.9, 15.6, 20.3, 26.6, 21.9, -9.4, 4.7, -1.6, 25.0

Gruppe „Fernseher": 6.2, 15.6, 25.0, 4.7, 28.1, 17.2, 14.1, 31.2, 12.6, 9.4, 17.2, 23.4

Testen Sie mittels eines Rangsummentests die Hypothese, dass die Verteilungen der Punktzahldifferenzen für beide Gruppen gleich sind (beispielsweise zum Irrtumsniveau 5%).