Übungen zur Angewandten Stochastik

Blatt 7

1. Aufgabe **a)** Unter P_ϑ, $\vartheta \in \Theta = (0,\infty)$ seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängig und uniform verteilt auf $(0,\vartheta)$. Zeigen Sie: Dieses Modell hat monotone Likelihood-Quotienten bezüglich der Statistik $T := \max\{X_1,\dots,X_n\}$.

b) Unter P_ϑ, $\vartheta \in \Theta = \mathbb{R}$ sei X Cauchy-verteilt mit Lageparameter ϑ, d.h. die Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes ist $\pi^{-1}\big(1+(x-\vartheta)^2\big)^{-1}$. Zeigen Sie: Es gibt keine Statistik T, bezüglich der dieses Modell monotone Likelihood-Quotienten besitzt.

2. Aufgabe In einer Urne befinden sich N Kugeln, darunter eine unbekannte Anzahl $\vartheta \in \{0,1,\dots,N\}$ weiße, die übrigen sind schwarz. Sei $\vartheta_0 \in \{1,\dots,N\}$, $\alpha \in (0,1)$. Sie möchten die Nullhypothese $H_0 : \vartheta \geq \vartheta_0$ gegen die Alternative $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$ anhand der Beobachtung von n Zügen ohne Zurücklegen testen. Geben Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau α an.

Sei $N = 1000$, $\vartheta_0 = 750$, $\alpha = 0.01$. Wie groß muss n mindestens sein, damit die Macht des Tests bei jedem $\vartheta \leq 700$ mindestens 0.99 beträgt?

(Hinweis: Zeigen Sie, dass die Likelihood-Quotienten als Funktion der Anzahl beobachteter schwarzer Kugeln monoton wachsen.)

3. Aufgabe Nehmen wir an, der Gehalt X (in μg/L) an Patulin (einem Schimmelpilzgift, das in verfaultem Obst vorkommt) in Flaschen einer bestimmten Sorte Apfelsaft sei normalverteilt mit unbekanntem Mittelwert m und unbekannter Varianz v. Vor Versand einer Lieferung testet der Produzent die Hypothesen

$$H_0 : m \leq m_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : m > m_0$$

mit einem T-Test zum Niveau $\alpha = 0.01$ mit einer Stichprobe der Größe $n = 5$, wobei $m_0 = 50$ der von der WHO empfohlene Grenzwert ist. Die Charge wird nur ausgeliefert, wenn der Test H_0 nicht verwirft.

Eine Verbraucherorganisation testet mit demselben n und α mittels eines T-Tests

$$H_0' : m \geq m_1 \quad \text{gegen} \quad H_1' : m < m_1$$

mit dem Schwellwert $m_1 = 40$ und fordert, nur solche Chargen zum Verkauf zuzulassen, für die ihr Test H_0' ablehnt.

a) Beschreiben Sie inhaltlich die möglichen Fehlentscheidungen der beiden Tests. Plotten Sie (beispielsweise mit dem `R`-Befehl `curve`) die Gütefunktionen der beiden Tests als Funktion von m für $v = 5$ und $v = 10$.

b) In einer Stichprobe der Größe $n = 5$ wurde ein empirischer Mittelwert von $\overline{x} = 52.5$ und eine korrigierte Stichprobenvarianz von $v^* = 8.7$ beobachtet. Zu welchem Ergebnis kommen die beiden Tests jeweils?

c) Wie groß müsste n sein, so dass bei beobachtetem $(\overline{x}, v^*) = (52.5, 8.7)$ in einer Stichprobe der Größe n sich die Antwort aus b) ändert?

4. Aufgabe (zweiseitiger χ^2-Test) Wir betrachten im Gauß'schen Produktmodell mit unbekanntem Mittelwert $m \in \mathbb{R}$ und unbekannter Varianz $v > 0$ das zweiseitige Testproblem $H_0 : v = v_0$ gegen $H_1 : v \neq v_0$. Ein naheliegender Vorschlag ist folgender Test (V^* sei die korrigierte Stichprobenvarianz):

$$\text{akzeptiere } H_0, \text{ wenn } c_1 \leq \frac{n-1}{v_0} V^* \leq c_2, \quad \text{sonst verwerfe } H_0$$

(mit c_1, c_2, die in Abhängigkeit von dem gewünschten Niveau α gewählt werden).

a) Bestimmen Sie die Gütefunktion dieses Tests bei gegebenem n, c_1, c_2. Wie muß man zu gegebenem Niveau $\alpha \in (0,1)$ die Schwellwerte c_1, c_2 wählen, so dass der resultierende Test unverfälscht ist? Liefert die „naive" Wahl

$$c_1, c_2 \text{ so dass } \mathbb{P}_{(m,v_0)}\Big(\frac{n-1}{v_0} V^* < c_1\Big) = \frac{\alpha}{2} = \mathbb{P}_{(m,v_0)}\Big(\frac{n-1}{v_0} V^* > c_1\Big)$$

einen unverfälschten Test?
(Hinweis: betrachten Sie die Ableitung der Gütefunktion an der Stelle $v = v_0$.)

b)* Betrachten Sie einen auf dem Likelihood-Quotienten $R := \dfrac{\sup_{m\in\mathbb{R}, v>0} \rho_{(m,v)}^{\otimes n}(X_1,\dots,X_n)}{\sup_{m\in\mathbb{R}} \rho_{(m,v_0)}^{\otimes n}(X_1,\dots,X_n)}$ beruhenden Test $\varphi = \mathbf{1}_{\{R>c\}}$. Wie paßt er zu a)?