

Aufgabe 1.1 Die Aussage A sei “5 ist eine Primzahl”, die Aussage B sei “Berlin ist die Hauptstadt von Italien” und die Aussage C sei “2 teilt 9”. Vervollständigen Sie die folgende Wahrheitstabelle.

A	B	C	$A \vee B$	$A \wedge C$	$\neg A$	$\neg C$	$B \wedge \neg A$	$A \wedge (B \vee \neg C)$	$A \vee C \Leftrightarrow B \wedge \neg A$

Aufgabe 1.2 Welche der Aussagen sind wahr? (Hier sind $x, y \in \mathbb{R}$.)

- a) $0 < 1 \vee 1 > 2$,
- b) $0 > 1 \wedge 1 > 2$,
- c) $0 < 1 \Rightarrow 1 < 2$,
- d) $0 > 1 \Rightarrow 1 > 2$.

Verneinen Sie die obigen Aussagen. Sorgen Sie dafür, dass in den neuen Aussagen das Zeichen \neg nicht vorkommt.

Aufgabe 1.3 Beweisen Sie, dass die folgenden drei Aussagen: $A \Rightarrow B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$ und $(A \wedge \neg B) \Rightarrow B$ äquivalent sind.

Aufgabe 1.4 Wir bilden aus den Aussagen A und B (die falsch oder wahr sein können) folgende Prädikate:

- a) $A \Rightarrow \neg A$,
- b) $A \vee \neg A \Rightarrow A \wedge \neg A$,
- c) $A \wedge \neg A \Rightarrow A \vee \neg A$,
- d) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow A \vee \neg A$,
- e) $A \wedge B \Rightarrow A \vee B$,
- f) $A \vee (\neg A \wedge B) \Rightarrow \neg B$,
- g) $[(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)] \Rightarrow (A \vee B)$,
- h) $(A \vee B) \Rightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)]$.

Welche von diesen sind immer wahr bzw. immer falsch bzw. je nach Belegung von A und B wahr oder falsch?

Aufgabe 1.5 Es seien $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ und $C = \{1, 2, 5, 6\}$. Bestimmen Sie: $(A \cap B) \cup C$, $(B \cap C) \cup A$, $A \cap (B \cup C)$, $B \cap (C \cup A)$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

Aufgabe 1.6

- a) Beweisen Sie: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ ist im Allgemeinen nicht richtig. Überprüfen Sie dies an Hand einer Zeichnung und geben Sie ein Gegenbeispiel an.
- c) Ist die Aussage $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ wahr oder falsch? Fertigen Sie zuerst eine Zeichnung. Beweisen Sie nun die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 1.7 Für alle $n \geq 1$ sei $A_n = \{ \frac{a}{n} \mid a \in \mathbb{N} \}$. Bestimmen Sie

$$A_3, \quad \bigcap_{n \geq 1} A_n, \quad \bigcup_{n \geq 1} A_n, \quad A_2 \cap A_4, \quad A_6 \cap A_9, \quad A_n \cap A_m.$$