Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2019 **Blatt 10**

Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 10.1 Es seien die Vektoren $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Finden Sie eine Orthonormalbasis (b_1, b_2, b_3) von $\mathbb{R}_3$, so dass

b_1 parallel zu v ist,
b_2 in der Ebene durch den Ursprung und Punkte v, w liegt,
(b_1, b_2, b_3) negativ orientiert wird!

Wieviele Möglichkeiten gibt es insgesamt?

b) Es sei $E = \mathbb{R} \cdot u + \mathbb{R} \cdot w$ und A die Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an der Ebene E. Es sei ferner $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ mit $c_2 = u$ und $c_3 = \frac{w}{\|w\|}$. Berechnen Sie die Matrizen ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{C}}$ und $A = {}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{E}}$ ($\mathcal{E}$ ist die Standardbasis).

Finden Sie nun den Punkt v', der durch Spiegelung von v and der Ebene E entsteht.

Aufgabe 10.2 Es sei die Matrix A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Beweisen Sie, dass die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Matrix A orthogonal ist.

b) Es sei $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $A(v)$. Ergänzen Sie $b_1 = \frac{v}{\|v\|}$ zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ und berechnen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$.

c) Argumentieren Sie, warum A eine Drehung ist. Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel φ.

Aufgabe 10.3 Es sei die Matrix A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Beweisen Sie, dass die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Matrix A orthogonal ist.

b) Es sei $v = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2}-2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $A(v)$. Argumentieren Sie, warum A eine Drehspiegelung ist. Ergänzen Sie $b_1 = \frac{v}{\|v\|}$ zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ und berechnen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$.

c) Argumentieren Sie, warum A sogar eine Spiegelung ist. Geben Sie eine Gleichung der Spiegelungsebene an.

Aufgabe 10.4 Es sei eine Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben mit $\|A(v) - A(w)\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ und zusätzlich $A(0) = 0$. Zeigen Sie:

$$\langle A(v), A(w) \rangle = \langle v, w \rangle \text{ für alle } v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe# 10.5 Es seien die Vektoren $u = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix}2\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$ und $w = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Finden Sie den Punkt $p \in \mathbb{R} \cdot w$ mit minimalem Abstand zu v. Finden Sie den Punkt v', der durch Spiegelung von v and der Geraden $\mathbb{R} \cdot w$ entsteht. Machen Sie hierzu eine Skizze!

Aufgabe# 10.6 Zeigen Sie, dass A_1 und A_2 Drehungen sind, und bestimmen Sie die Drehwinkel (bzw. die Cosinus der Drehwinkel) und die Drehachsen.

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2-\sqrt{6} & 1+2\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} & 4 & 2-\sqrt{6} \\ 1-2\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe# 10.7 Beweisen Sie für 2×2 und 3×3 Matrizen: $(AB)^T = B^T A^T$.

Aufgabe# 10.8 Die lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ \beta & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha & -\beta \end{pmatrix}$$

ist orthogonal. Bestimmen Sie α und β.

Aufgabe# 10.9 Drehungen und Spiegelungen

a) Geben Sie die Matrix (bezüglich der Standardbasis) der Spiegelung an der Ebene $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ an.

b) Geben Sie die Matrix der Spiegelung an der Ebene $2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ an.

c) Geben Sie die Matrix der Drehung mit Achse $\mathbb{R} \cdot \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right)$ und Drehwinkel $\frac{\pi}{3}$ an.

d) Geben Sie die Matrix der Drehung mit Achse $\mathbb{R} \cdot \left(\begin{smallmatrix}-1\\3\\2\end{smallmatrix}\right)$ und Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$ an.

Aufgabe# 10.10 Es sei $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$. Beweisen Sie, dass für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ stets $\gamma_{\mathcal{B}}(v) = \left(\begin{smallmatrix}\langle v,b_1\rangle\\\langle v,b_2\rangle\\\langle v,b_3\rangle\end{smallmatrix}\right)$ gilt.
Zur Erinnerung: $\gamma_{\mathcal{B}}(v)$ bezeichnet die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Es gilt

$$\gamma_{\mathcal{B}}(v) = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow v = xb_1 + yb_2 + zb_3.$$